Partie I - Quelques exemples

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice 1. Alors $0_{\mathscr{L}(E)} = u^1 = u$. Réciproquement, l'endomorphisme nul est nilpotent d'ordre 1 en dimension non nulle (car $\mathrm{id}_E \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ lorsque E n'est pas réduit à son zéro).

2) a) On sait que $u = u^1 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ car u est nilpotent d'indice 2. Donc il existe un vecteur x de E tel que $u(x) \neq 0$.

   b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha x + \beta u(x) = 0_E$.
   Alors $0_E = u(0_E) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) = \alpha u(x) + 0_E$. Comme $u(x) \neq 0_E$, on a $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$.
   Ainsi $0_E = \alpha x + \beta u(x) = 0_E + \beta u(x)$. Comme $u(x) \neq 0_E$, on a $\beta = 0_{\mathbb{C}}$.
   La famille $\mathscr{B} = (x, u(x))$ est donc libre. C'est une famille de longueur $2 = \dim(E)$. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   c) On voit que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = J_2$ car $u(x) = u(x)$ et $u(u(x)) = u^2(x) = 0_E$.

3) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Si $A \neq 0$ alors A est semblable à J_2. En effet, on peut considérer l'endomorphisme a de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A et défini par $X \mapsto AX$. D'après ce qui précède, il est nilpotent d'indice 2. En appliquant les résultats de la question 2), il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(a) = J_2$ ce qui montre que A est semblable à J_2.
   Par contre J_2 n'est pas semblable à la matrice nulle car $\mathrm{rg}(A) = 1 \neq 0 = \mathrm{rg}(0)$.
   Il y a donc deux classes de similitudes de matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Les matrices semblables à 0 (il n'y a que 0) et les matrices semblables à J_2.

4) a) Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et donc $u(x) = u^2(y) = 0$. Cela montre que $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et donc que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
   On déduit de ce qui précède que $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Or, d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u)$. On en déduit que $r \leqslant n - r$ puis que $2r \leqslant n$.

   b) On suppose que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Soit $f_1, \dots, f_r$ une base de $\mathrm{Im}(u)$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe un vecteur noté e_i tel que $u(e_i) = f_i$. Montrons que la famille $\mathscr{F} = (e_1, f_1, e_2, \dots, f_r)$ est une base de E. Montrons quelle est libre. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u(e_i) = 0$. En appliquant u on obtient que

$$0 = u(0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(e_i) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i u^2(e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$$

   On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ car la famille (f_i) est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   On a donc $\sum_{i=1}^{r} \mu_i f_i = 0$ ce qui implique que $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$, là encore car la famille (f_i) est libre.
   On a donc montré que la famille $(e_1, f_1, e_2, \dots, f_r)$ est libre. Comme il y a $2r$ vecteurs et que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2r$, la famille est une base.
   Dans cette base, la matrice u est $\mathrm{diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$ par définition.

c) On suppose que $\operatorname{Im}(u) \subsetneq \operatorname{Ker}(u)$.

Dans les mêmes notations que précédemment, la famille $\mathscr{F} = (e_1, f_1, \dots, e_r, f_r)$ reste libre, mais le sous-espace vectoriel F qu'elle engendre n'est pas E car il est de dimension $2r < n$.

Montrons que $E = F + \operatorname{Ker}(u)$.

Soit $x \in E$ et $y = u(x)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ tels que $y = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r$. Notons $x' = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r$. On voit que $u(x - x') = u(x) - u(x') = y - y = 0_E$ donc $x - x' \in \operatorname{Ker}(u)$. De plus $x' \in F$. Donc comme $x = x' + (x - x')$, $x \in F + \operatorname{Ker}(u)$. Ainsi $E \subset F + \operatorname{Ker}(u)$. L'inclusion réciproque est triviale.

Soit $\mathscr{K}$ une famille génératrice finie de $\operatorname{Ker}(u)$ et soit $\mathscr{E}$ la concaténée de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{K}$. Comme $E = F + \operatorname{Ker}(u)$, la famille $\mathscr{E}$, qui est finie, engendre E .

Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de E à l'aide de termes $v_1, \dots, v_{n-2r}$ de $\mathscr{K}$. On a bien obtenu une base de la forme désirée.

La matrice de u dans cette base est $\operatorname{diag}(J_2, \dots, J_2, J_1, \dots, J_1)$ avec r blocs J_2 et $n - 2r$ blocs J_1.

Partie II - Décomposition de Jordan

5) a) Pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$. En particulier, pour tout $x \in \operatorname{Im}(u)$, $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$. Donc $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u. Soit $\breve{u}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im}(u)$ induit par u.

Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$. Soit x un antécédent de y par u. $0_E = u^p(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(y) = \breve{u}^{p-1}(y)$. Donc $\breve{u}^{p-1} = 0_{\mathscr{L}(\operatorname{Im}(u))}$.

De plus, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Notant $y = u(x)$, on a $\breve{u}^{p-2}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$.

Donc $\breve{u}^{p-2} \neq 0_{\mathscr{L}(\operatorname{Im}(u))}$.

Ainsi $\breve{u}$ est nilpotent d'indice $p - 1$.

Notons que cela reste vrai si $p = 1$. Dans ce cas, $u = 0$ et donc $\operatorname{Im}(u) = \{0\}$. On a vu que l'unique endomorphisme de $\{0\}$ est nilpotent d'indice 0.

b) Soit x un vecteur non nul de E. Soit $x' \in C_u(x)$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_K \in \mathbb{C}$ tels que $x' = \sum_{k=0}^{K} \lambda_k u^k(x)$ car x' est combinaison linéaire d'un nombre fini des $u_k(x),\ k \in \mathbb{N}$. Alors

$$u(x') = \sum_{k=0}^{K} \lambda_k u^{k+1}(x) \in C_u(x)$$

Donc $C_u(x)$ est stable par u.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(x) = 0_E\}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et n'est pas vide car il contient p. Il a donc un plus petit élément, qu'on note $s(x)$.

c) Montrons que la famille $\left(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une base de $C_u(x)$.

— Pour tout $y \in C_u(x)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ que l'on peut supposer supérieur à $s(x)$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ tels que $y = \sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k u^k(x)$. Or comme $u^{s(x)}(x) = 0$, pour tout $k \geqslant s(x)$, $u^k(x) = 0$ donc $y = \sum\limits_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x)$. Cela montre que $\left(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ engendre $C_u(x)$.

— Montrons que la famille est libre. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{s(x)-1}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![0, s(x)-1]\!]$ tels que $\lambda_k \neq 0$ et posons q le plus petit tel entier. On compose alors l'égalité par $u^{s(x)-1-q}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= u^{s(x)-1-q}\left(\sum_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x)\right) = u^{s(x)-1-q}\left(\sum_{k=q}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x)\right) \\ &= \sum_{k=q}^{s(x)-1} \lambda_k u^{s(x)-1-q+k}(x) = \lambda_q u^{s(x)-1}(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda_q = 0$ car $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$ ce qui est absurde.

La famille $\big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big)$ est libre.

Par définition de la base, la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $C_u(x)$ est $J_{s(x)}$.

6) Initialisons la récurrence au rang $p = 1$. Si u nilpotent d'indice 1, on sait que $u = 0$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s(x_i) = 1$ donc $C_u(x_i) = \mathrm{Vect}(x_i)$. On en déduit que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} C_u(x_i)$$

7) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété à démontrer vraie au rang p. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$ d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $\breve{u}$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par u.

Par la question 5.a), $\breve{u}$ est nilpotent d'indice p donc, par hypothèse de récurrence, il existe des vecteurs $y_1, \dots, y_s$ de $\mathrm{Im}(u)$ tels que $\mathrm{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{s} C_{\breve{u}}(y_i)$.

b) Montrons que les espaces vectoriels $C_u(x_1), \dots C_u(x_s)$ sont en somme directe. Soit $t_1, \dots t_s$ des vecteurs de $C_u(x_1), \dots, C_u(x_s)$ tels que $t_1 + \cdots + t_s = 0$. En appliquant u on obtient que $u(t_s) + \cdots + u(t_s) = u(0) = 0$. Or, comme $t_i \in C_u(x_i)$, $u(t_i) \in C_{\breve{u}}(y_i)$. Ces espaces sont en somme directe donc on obtient que $u(t_1) = \cdots = u(t_s) = 0$.

Maintenant, pour $i \in [\![1, s]\!]$, si on écrit $t_i = \sum\limits_{k=0}^{s(x_i)-1} \lambda_k u^k(x_i)$, on a

$$0 = u(t_i) = \sum_{k=0}^{s(x_i)-1} \lambda_k u^{k+1}(x_i) = \sum_{k=1}^{s(x_i)} \lambda_{k-1} u^k(x_i) = \sum_{k=1}^{s(x_i)-1} \lambda_{k-1} u^k(x_i)$$

Par unicité de la décomposition dans la base on a que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{s(x_i)-2} = 0$ et donc $t_i \in \mathrm{Vect}(u^{s(x_i)-1}(x_i))$. Comme $s(y_i) \geqslant 1$, $s(x_i) = s(y_i) + 1 \geqslant 2$ et donc $s(x_i) - 1 \geqslant 1$ ce qui montre que $t_i \in C_{\breve{u}}(y_i)$.

On peut donc de nouveau utiliser que sous-espaces vectoriels $C_{\breve{u}}(x_i)$ sont en somme directe pour obtenir $t_1 = \cdots = t_s = 0$. Cela montre que les espaces vectoriels $C_u(x_1), \dots C_u(x_s)$ sont en somme directe.

On peut alors procéder comme à la question 4.c) pour obtenir que $E = \mathrm{Ker}(u) + \bigoplus\limits_{i=1}^{s} C_u(x_i)$.

Précisément, si $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \oplus_{i=1}^{s} C_u(y_i)$. Il existe donc $(z_1, \dots, z_s) \in C_u(y_1) \times \cdots \times C_u(y_s)$ tels que $u(x) = z_1 + \cdots + z_s$. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, en décomposant z_i

dans la base $(y_i, \dots, u^{s(y_i)-1}(y_i)) = (u(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(y_i))$, on peut obtenir $t_i \in C_u(x_i)$ tel que $u(t_i) = z_i$.

Il suffit alors de voir que

$$u\left(x - \sum_{i=1}^{s} t_i\right) = u(x) - \sum_{i=1}^{s} u(t_i) = u(x) - \sum_{i=1}^{s} z_i = 0$$

On en déduit que

$$x = \left(x - \sum_{i=1}^{s} t_i\right) + \sum_{i=1}^{s} t_i \in \mathrm{Ker}(u) + \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$$

c) La famille $\mathscr{F} = (x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_s, \dots, u^{s(x_s)-1}(x_s))$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$ car les $C_u(x_i)$ sont en somme directe et car pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $(x_i, \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i))$ est une base de $C_u(x_i)$.

En lui concaténant une famille génératrice finie de $\mathrm{Ker}(u)$, on obtient une famille génératrice finie $\mathscr{G}$ de E car $E = \mathrm{Ker}(u) + \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$.

On peut donc compléter la famille libre $\mathscr{F}$ par des termes de $\mathscr{G}$ pour obtenir une base $\mathscr{B}$ de E. Aucun des termes $v_1, \dots, v_q$ ajoutés lors de cette complétion ne peut être terme de $\mathscr{F}$ car $\mathscr{B}$ est libre, donc tous sont termes de $\mathscr{G}$ donc appartiennent à $\mathrm{Ker}(u)$.

Par le théorème de la base adaptée, on a

$$E = \mathrm{Vect}(v_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Vect}(v_q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i) = C_u(v_1) \oplus \ldots \oplus C_u(v_q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} C_u(x_i)$$

car pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $C_u(v_j) = \mathrm{Vect}t(v_j)$ car $v_j \neq 0_E$ et $u(v_j) = 0_E$.

Donc la propriété à démontrer est vraie au rang $p+1$ (avec $t = s + q$).

Par récurrence, elle est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

8) Dans la base $(x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_t, \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t))$, la matrice de u est $\mathrm{diag}(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)})$.

9) Soit $x \in E$ et $\lambda_{1,0}, \dots, \lambda_{1,s(x_1)-1}, \dots, \lambda_{t,0}, \dots, \lambda_{t,s(x_t)-1}$ ses coordonnées dans la base précédente.
Dans la même base, $u(x) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{s(x_i)-2} \lambda_{i,j} u^{j+1}(x_i)$.
$u(x) = 0_E$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, t]\!]\ \forall j \in [\![0, s(x_i) - 2]\!]\ \ \lambda_{i,j} = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u)$ a pour base $(u^{s(x_i)-1}(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant t}$ donc sa dimension est t.