Exercice I

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$
2) Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$ où C est une constante que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.
3) Calculer C.
   On pourra admettre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout $X \in]0,1[$, $\ln(1+X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}X^k$.

Exercice II

On donne la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1) *Deux cas particuliers.* Soit $\beta > 0$. Soit $g \in \mathscr{C}^0([0,\beta])$ telle que $g(0) \neq 0$.
   a) Montrer que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx}\,g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$
   Indication. Pour $t > 0$, on pourra construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, bornée, telle que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx}\,g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,g_t(u)\,\mathrm{d}u.$$
   b) Montrer de même que
   $$\int_0^{\beta} e^{-tx^2}\,g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{g(0)}{\sqrt{t}}.$$

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) \neq 0$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Pour tout paramètre $t \in \mathbb{R}$, on note
$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les deux cas étudiés à la question 1) correspondent à $\varphi(x) = x$ et $\varphi(x) = x^2$ respectivement lorsque $a = 0$ et $b = \beta$.

2) *Cas où φ n'a pas de point critique dans* $[a,b]$. On suppose que $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.
   a) Montrer que $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$, et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$.
   b) Montrer que
   $$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\varphi'(a)t}.$$
   Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1.a) à l'aide d'un changement de variable.

3) *Cas où φ a un point critique en a.* On suppose maintenant que $\varphi \in \mathscr{C}^2([a,b])$, $\varphi'(a) = 0$, $\varphi''(a) > 0$, et $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b]$.

   a) Montrer que la formule $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Calculer $\psi'(a)$.

   b) Montrer que ψ réalise une bijection de $[a,b]$ sur un intervalle de la forme $[0,\beta]$.

   c) Montrer que

$$F(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \, \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

   Indication. On se ramènera au cas traité à la question 1.b) à l'aide d'un changement de variable.

On admettra que le résultat se généralise de la façon suivante ;
Résultat 1. *Soit $f \in \mathscr{C}^0(]0,+\infty[)$ et $\varphi \in \mathscr{C}^2(]0,+\infty[)$. on suppose qu'il existe un unique $c > 0$ tel que $\varphi'(c) = 0$. On suppose de plus que $f(c) \neq 0$ et $\varphi''(c) > 0$. On suppose finalement que $\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)} \, |f(x)| \, dx$ converge. Alors,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} \, f(x) \, \mathrm{d}x \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \, \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}.$$

4) *Application.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1} \, e^{-x} \, \mathrm{d}x$.

   a) Montrer la convergence et calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On utilisera une récurrence.*

   b) En déduire l'équivalent suivant

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \, n^{n+\frac{1}{2}} \, e^{-n}.$$

   Indication. On réécrira d'abord $\Gamma(n+1)$ sous la forme

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x - \ln x)} \, \mathrm{d}x.$$