Exercice I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha}$.

— On voit d'abord que f_α est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— Étude au voisinage de 0. Quand $x \to 0$, $f_\alpha(x) \to \frac{0}{1} = 0$. Ainsi f_α se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ donc intégrable au voisinage de 0 car intégrable sur le segment $[0,1]$. On peut aussi dire que $f_\alpha(x) = o_{x\to 0}(1)$ et $x \mapsto 1 = \frac{1}{x^0}$ est intégrable au voisinage de zéro.

— Étude au voisinage de $+\infty$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $x^\beta f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\beta+1-2\alpha} \ln x$ donc quand $x \to +\infty$, $x^\beta f_\alpha(x)$ tend vers 0 si $\beta < 2\alpha - 1$ et vers $+\infty$ sinon.

$\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, l'intervalle $]1, 2\alpha-1[$ est non vide et prenant β dans cet intervalle, $f_\alpha(x) = o_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^\beta})$, et comme $\beta > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\beta}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (elle l'est sur $[1,+\infty[$). Donc f_α aussi d'où $\int_{]0,+\infty[} f_\alpha$ $\boxed{\text{converge}}$.

$\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 1}$, $x f_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$ donc $\frac{1}{x} = o_{x\to+\infty}(f(x))$ et comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, f_α ne l'est pas non plus. La fonction f_α étant positive, $\int_{]0,+\infty[} f_\alpha = \int_{]0,+\infty[} |f_\alpha|$ $\boxed{\text{diverge}}$.

Pour le calcul, pour $b > 0$, posons

$$\begin{aligned}
F(b) &= \int_1^b \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx \\
&= \int_a^b \frac{x}{(1+x^2)^2}\ln x dx \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\ln x\right]_1^b - \int_a^b -\frac{1}{2(1+x^2)}\frac{1}{x}dx \text{ par intégration par parties} \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\ln x\right]_1^b - \int_1^b -\frac{1}{2x^2(1+x^2)}xdx \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\ln x\right]_a^b - \int_1^{b^2} -\frac{1}{4u(1+u)}du \text{ par cdv de classe } \mathcal{C}^1 \ : u = x^2,\ du = 2xdx \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\ln x\right]_1^b + \int_1^{b^2} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\
&= -\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{b^2+1} + C
\end{aligned}$$

où C est une constante.

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = C$$

car $\dfrac{\ln b}{1+b^2} \sim \dfrac{\ln b}{b^2}$ quand $b \to +\infty$. De plus

$$F(b) = \left(-\frac{1}{2(1+b^2)} + \frac{1}{2}\right)\ln b - \frac{1}{4}\ln(b^2+1) + C = \frac{b^2\ln b}{2(1+b^2)} - \frac{1}{4}\ln(b^2+1) + C \underset{b\to 0}{\longrightarrow} C$$

Donc $\displaystyle\int_0^\infty f_2 = \lim_{+\infty} F - \lim_0 F = 0$.

On pouvait aussi établir ce résultat en prouvant que l'intégrale est égale à son opposé en utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, $dx = -\dfrac{du}{u^2}$.

Exercice II

1) Soit n un entier non nul.

   La fonction $f_n : x \mapsto \sin(2nx)\text{cotan}(x) = \dfrac{\sin(2nx)\cos(x)}{\sin x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2nx}{n} = 2n$. La fonction est ainsi prolongeable par continuité en 0 (ou $f_n(x) = \underset{x\to 0}{O}(1)$) donc $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ converge.

   De même $x \mapsto \dfrac{\sin(2nx)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x}dx$ converge.

2) Soit n un entier non nul

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(2(n+1)x) - \sin(2nx))\cos(x)}{\sin x}dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos((2n+1)x)\cos(x)}{\sin x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)x) + \cos(2nx)dx \\
&= \left[\frac{\sin((2n+2)x)}{2n+2} + \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0
\end{aligned}$$

   On en déduit que $u_{n+1} = u_n$. Donc u_n ne dépend pas de n.

3) On considère sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $h : x \mapsto \text{cotan}(x) - \dfrac{1}{x}$

   a) Pour $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{3}$$

   La fonction h se prolonge donc par continuité en posant $h(0) = 0$.

   b) La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus elle est continue en 0.
   Pour $x \neq 0$,

$$h'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{3}.$$

   La dérivée h' tend donc vers $-\frac{1}{3}$ en 0 donc, par le théorème de limite de la dérivée, h est dérivable en 0, $h'(0) = -\frac{1}{3}$ et donc h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par intégration par parties, pour $p > 0$:

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(px)dx = \left[-f(x)\frac{\cos(px)}{p}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos(px)dx$$

   Maintenant, f et f' sont continues sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc elles sont bornées. Il existe donc des réels positifs M et M' tels que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], |f(x)| \leqslant M \text{ et } |f'(x)| \leqslant M'.$$

On a alors,

$$|I_p| \leqslant \frac{2M}{p} + \frac{\pi M'}{2p}.$$

On en déduit par encadrement que

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(px) = 0.$$

En appliquant ce résultat à la fonction h, on en déduit que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

5) a) La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\varphi(x) = \underset{x \to 0}{O}(1)$ et ainsi φ est intégrable au voisinage de zéro.

Pour tout $X > 0$, $\displaystyle\int_1^X \varphi(x)dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}dx = \frac{-\cos X}{X} + \cos 1 + cte + \underset{X \to \infty}{o}(1)$ car puisque $\displaystyle\frac{\cos x}{x^2} = \underset{x \to \infty}{O}(\frac{1}{x^2})$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ converge absolument donc converge.

Comme $\displaystyle\frac{-\cos X}{X} = \underset{X \to \infty}{O}\left(\frac{1}{X}\right) \underset{X \to \infty}{\to} 0$, $\displaystyle\int_1^X \varphi(x)dx \underset{X \to \infty}{\to} \cos 1 + cte$, donc $\displaystyle\int_1^\infty \varphi(x)dx$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(x)dx$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_n - u_n + u_n = v_n - u_n + u_1$ d'après la question 2.

On en déduit en utilisant 4) que la suite (v_n) converge vers u_1.

Maintenant

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\text{cotan}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + \cos(2x)\Big)dx = \frac{\pi}{2}.$$

De plus en faisant le changement de variable $u = 2nx$ dans v_n on obtient

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x}dx = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}du.$$

Comme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du$ converge et comme $n\pi \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$, la suite (v_n) converge vers la valeur de cette intégrale.

Par unicité de la limite de (v_n),

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$

6) Calculons pour commencer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$.

Commençons par remarquer que la fonction $\theta : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\theta(0) = 1$. On considère donc une fonction continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $x \geqslant 1$, $|\theta(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$. On en déduit, en comparant avec l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ converge.

On réalise alors une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \left[-\frac{\sin^2(x)}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{x}dx$$

où le crochet converge et vaut 0 car $\left|\frac{\sin^2(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0$ et que $\frac{\sin^2(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x$.
En particulier, l'intégrale de droite de l'égalité converge. Maintenant, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\cos(x)\sin(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2}}du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$$

où on a réalisé le changement de variable $x = 2u$.
Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}}$
Calculons maintenant $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx$.
On remarque de même que la fonction $\phi : x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{x^3}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$. On considère donc une fonction continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $x \geqslant 1$, $|\phi(x)| \leqslant \frac{1}{x^3}$. On en déduit, en comparant avec l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx$ converge.
On réalise alors une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{\sin^3(x)}{x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{3\cos(x)\sin^2(x)}{x^2}dx$$

où le crochet converge et vaut 0 car $\left|\frac{\sin^3(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^3}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} = 0$ et que $\frac{\sin^3(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x$.
En particulier, l'intégrale de droite de l'égalité converge. Maintenant, en intégrant de nouveau par parties, on a

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{3\cos(x)\sin^2(x)}{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{3\cos(x)\sin^2(x)}{x}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{-\sin^3(x) + 2\cos^2(x)\sin(x)}{x}dx$$

Là encore, le crochet converge et vaut 0 par des calculs similaires aux précédents. Cela montre que l'intégrale de droite converge. En utilisant que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, cette dernière vaut alors

$$\frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2\sin(x) - 3\sin^3(x)}{x}dx$$

On peut alors linéariser $\sin^3(x)$:

$$\sin^3(x) = -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)$$

On obtient alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{3\sin(x) + \frac{3}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)}{x}dx = \frac{3}{8}\left(3\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x}dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx\right)$$

En utilisant le changement de variable $u = 3x$ dans la première des deux intégrales de droite, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x}dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{3}}du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$$

Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{3\pi}{8}}$