On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer les deux valeurs propres de A. On les notera $\lambda_1 < \lambda_2$

Corrigé

On sait que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, λ est une valeur propre si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Or

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

On en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

2. Déterminer $u_1 = (1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (1, y_2, z_2)$ tels que $E_{\lambda_1}(a) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{\lambda_2}(a) = \mathrm{Vect}(u_2)$.

Corrigé

— Pour $\lambda_1 = 1$, on résout le système donné par la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Elle est visiblement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_1 = (1, 1, 0)$ est solution du système.

— Pour $\lambda_2 = 2$, on résout le système donné par la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est visiblement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_2 = (1, 2, 1)$ est solution du système.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé

☐ Oui ☑ Non

4. Déterminer $u_3 = (x_3, y_3, 1)$ tel que $(a - 2\mathrm{id})(u_3) = (1, 2, 1)$.

Corrigé

Pour déterminer u_3 on résout le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En faisant (par exemple) les opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et enfin $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ on se ramène à résoudre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Comme on veut que la dernière coordonnée soit égale à 1 on obtient $y_3 = 1$ puis $x_3 = 1$
Finalement $u_3 = (1, 1, 1)$.

5. Donner la matrice de a dans la base (u_1, u_2, u_3).

Corrigé

Par construction,

$$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé

On sait que $(\mathbf{R}^3)^*$ est de dimension 3. Pour montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$ il suffit de montrer que la famille est libre.
Soit λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 = 0$. En évaluant en $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ on obtient que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

On vérifie aisément que le système est inversible. La seule solution étant donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$, la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est libre ; c'est donc une base de $(\mathbf{R}^3)^*$.
Cherchons maintenant la base (w_1, w_2, w_3). Notons pour $i \in [\![1,3]\!]$, $w_i = (x_i, y_i, z_i)$ et posons $W_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$. Par définition du fait de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est la base duale de (w_1, w_2, w_3) on obtient $AW = I_3$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } W = \left(\begin{array}{c|c|c} W_1 & W_2 & W_3 \end{array} \right)$$

En inversant la matrice A on obtient

$$w_1 = (-1, 2, 0), w_2 = (-1, 2, 1) \text{ et } w_3 = (1, -1, 0)$$