1. a) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2+n+1}$.

Corrigé

La série CONVERGE par comparaison pour les séries à termes positifs car $\frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2}$.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Corrigé

La série DIVERGE par comparaison pour les séries à termes positifs car $\frac{2}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim \frac{2}{n}$ puisque $(-1)^n\sqrt{n} = o(n)$.

c) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Corrigé

La série CONVERGE. On sait que, au voisinage de 0, $\sin(x) = x + O(x^3)$. On en déduit que

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La première partie converge par le théorème des séries alternées, la deuxième est dominée par une série absolument convergente.

d) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(1+(\operatorname{ch}(n))^2)}$.

Corrigé

La série DIVERGE. En effet

$$\ln(1+(\operatorname{ch}(n))^2) \sim 2\ln(\operatorname{ch}(n)) \sim 2n$$

On peut utiliser une comparaison pour les séries à termes positifs.

e) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

Corrigé

La série DIVERGE. En effet

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \sim \frac{e}{n}$$

On peut utiliser une comparaison pour les séries à termes positifs.

2. Déterminer $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-4}{(n+1)!} = ae+b$$

Corrigé

La série est clairement convergente, on fait le calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n-4}{(n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)+2(n+1)-6}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\
&= e + 2e - 6(e-1) \\
&= -3e + 6
\end{aligned}$$

3. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^2}$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que la série converge.

Corrigé

On pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$. Comme $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont des fonctions croissantes et à valeurs positives sur $]1,+\infty[$, $t \mapsto t(\ln t)^2$ est croissante et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et donc f est décroissante. On en déduit, par comparaison série intégrale que pour tout $n \geqslant 3$

$$\int_3^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \int_2^n f(t)dt$$

Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{\ln t}$. La partie de droite de l'inégalité ci-dessus devient alors

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n \leqslant \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

On en déduit que **la suite des sommes partielles** est bornée par $\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{2(\ln 2)^2}$, comme la série est **à termes positifs**, la série converge.

Bonus : Déterminer un équivalent du reste de la série de l'exercice précédent

Corrigé

On reprend le résultat de la comparaison série intégrale pour $3 \leqslant p \leqslant n$ pour encadrer $A = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

$$\frac{1}{\ln(p+1)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_{p+1}^{n+1} \leqslant A \leqslant \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_{p}^{n} \leqslant \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient un encadrement de $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$:

$$\frac{1}{\ln(p+1)} \leqslant R_p \leqslant \frac{1}{\ln p}$$

Comme $\ln(p+1) = \ln(p) + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \ln(p) + o(\ln(p)) \sim \ln(p)$, on a $\frac{1}{\ln(p+1)} \sim \frac{1}{\ln(p)}$.

Par encadrement, $R_p \sim \frac{1}{\ln(p)}$.