Problème I

L'objet du problème est l'étude d'une approximation de $\ln(n!)$ pour les grandes valeurs de l'entier n.
Dans la partie I, on établit des majorations qui seront utilisées dans les parties II et III.
Dans la partie II, on étudie une suite permettant d'obtenir une première approximation de $\ln(n!)$.
Dans la partie III, on établit une évaluation plus précise

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1.
Étant donnés deux entiers i et j tels que $0 \leqslant j \leqslant i$, on note $\binom{i}{j} = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ avec la convention usuelle $0! = 1$.

Partie I

1) a) Justifier que : $\forall t \neq 1, \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

   En déduire : $\forall k \geqslant 2, \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t}\,\mathrm{d}t$

   b) En encadrant judicieusement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t}\,\mathrm{d}t$, montrer qu'on peut écrire :

   $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

2) On désigne par M un réel positif et on envisage une série réelle $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} z_k$ dont le terme général z_k vérifie pour tout $k \geqslant 2$, $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+2}}$.

   a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} z_k$.

   b) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

   c) En déduire que : $\forall n \geqslant 1, \quad \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \dfrac{M}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$.

Partie II - première approximation de $\ln(n!)$

3) *Expression de* $\ln(n!)$ *à l'aide d'une suite.*

   a) On considère la suite $(v_k)_{k \geqslant 2}$ définie par $v_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\,\mathrm{d}t$.

      i) Prouver que : $\forall n \geqslant 2, \quad \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t$.

      ii) Calculer $\displaystyle\int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t$.

   b) i) Établir que : $\forall k \geqslant 2, \quad v_k = \displaystyle\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))\,\mathrm{d}u$

ii) En déduire que : $\forall k \geqslant 2, \quad v_k = \dfrac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u-\frac{1}{2}}{k-u}\, du.$

On pourra utiliser une intégration par parties.

Dans la suite de cette partie on pose $w_k = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u-\frac{1}{2}}{k-u}\, du$ pour $k \geqslant 2$ (1).

c) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k.$

4) *Étude de la suite* $(w_k)_{k \geqslant 2}$.

a) Prouver que $w_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{u-u^2}{(k-u)^2}\, du$ pour $k \geqslant 2$.

b) En déduire que $0 \leqslant w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} w_k$ converge. On admettra que sa somme a pour valeur $1 - \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

On note désormais, dans toute la suite du problème, $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ *la suite définie par* $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

5) *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.

Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n$ (2)

6) *Majoration du reste* ε_n.

En utilisant ce qui précèce, établir que : $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)}$ pour $n \geqslant 2$.

Partie III - autre approximation de $\ln(n!)$

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de la suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$.

7) *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.

Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = w_k = -\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) - 1.$

8) a) En utilisant 1.b), montrer que : $\forall k \geqslant 2, \quad \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dfrac{b_i}{k^{i+1}} + \dfrac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ (3)

avec $b_i = \dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $\delta(k) = -\dfrac{1}{2(p+2)} + \alpha(k)\dfrac{k-\frac{1}{2}}{k}$.

b) En utilisant 1.b), montrer que : $|\delta(k)| \leqslant \dfrac{11}{12} \leqslant 1$.

Si vous trouvez une meilleure constante, ce n'est pas forcément faux. Continuez cependant avec la valeur $\frac{11}{12}$.

9) *Une première évaluation de* ε_n.

Dans cette question, on fixe $p = 1$ de sorte que (3) s'écrit $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2} + \dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{c_1}{k}$, c_1 désignant un nombre réel.

a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \quad \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1 + \dfrac{1}{k} + \dfrac{\beta(k)}{k^2}$ avec $0 \leqslant \beta(k) \leqslant 2$.

b) i) Déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1} - r_k| \leqslant \dfrac{7}{6k^3}$ pour $k \geqslant 2$.

ii) Le réel c_1 étant ainsi choisi établir que la série $\sum (r_{k-1} - r_k)$ converge, et que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) \right| \leqslant \frac{7}{12n^2}.$$

c) i) Calculer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (r_{k-1} - r_k)$ pour $m \geqslant n+1$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$.

ii) En déduire finalement :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2} \text{ avec } |\lambda_1(n)| \leqslant \frac{7}{12}.$$

Problème II

On note $D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \in D$, on note $\operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Pour tout $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k(n) = \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^{2p}(x_k(n)) \text{ et } T_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}}$$

Partie I

1) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que $x \leqslant \tan x$ et en déduire que : $0 \leqslant \dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotan}^2 x$.

b) Montrer que $\sin x \leqslant x$ et en déduire que : $\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotan}^2 x \leqslant 1$.

c) Soit $p \geqslant 1$ et a, b deux réels, rappeler la factorisation de $a^p - b^p$ par $a - b$.

d) Déduire des trois questions précédentes que pour tout $p \geqslant 1$: $0 \leqslant \dfrac{1}{x^{2p}} - \operatorname{cotan}^{2p} x \leqslant \dfrac{p}{x^{2(p-1)}}$.

2) Justifier que pour tout $p \geqslant 1$, la suite $(T_p(n))_{n \geqslant 1}$ a une limite finie. On note alors $\zeta(2p) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} T_p(n)$.

3) a) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$

$$0 \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi} \right)^{2p} T_p(n) - S_p(n) \leqslant p \left(\frac{2n+1}{\pi} \right)^{2(p-1)} T_{p-1}(n)$$

b) En déduire que : $\dfrac{1}{n^{2p}} S_p(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \left(\dfrac{2}{\pi} \right)^{2p} \zeta(2p)$.

On pourra traiter à part le cas $p = 1$.

Partie II

Soit $n \geqslant 1$, on note P_n le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$.

4) Déterminer le degré de P_n et donner son coefficient dominant.

5) a) Soit $\theta \in D$. Justifier que $P_n(\operatorname{cotan}^2(\theta)) = \dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}$.

On pourra considérer $\exp((2n+1)i\theta)$.

b) En déduire que $P_n = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \operatorname{cotan}^2(x_k(n)))$.

6) On note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\sigma_k(n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{cotan}^2(x_{i_1}(n)) \cdots \operatorname{cotan}^2(x_{i_k}(n))$$

En particulier,

$$\sigma_1(n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cotan}^2(x_i(n)) \quad \text{et} \quad \sigma_n(n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{cotan}^2(x_i(n))$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

a) À l'aide des relations coefficients-racines, exprimer $\sigma_k(n)$ en fonction des coefficients de P_n.

b) En déduire que $n \mapsto \sigma_k(n)$ est une fonction polynomiale à coefficients rationnels.

7) On admet que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant p$,

$$S_p(n) - \sigma_1(n)S_{p-1}(n) + \cdots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}(n)S_1(n) + (-1)^p\sigma_p(n)\,p = 0$$

a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $n \mapsto S_p(n)$ est une fonction polynomiale à coefficients rationnels sur $[\![p, +\infty[\![$.

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2p)$ est le produit de π^{2p} et d'un rationnel.

c) À l'aide de ce qui précède, calculer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.