Problème I

Partie I

1) a) Pour $t \neq 1$, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique nous donne

$$\sum_{k=0}^{p+1} t^k = 1 + t + \cdots + t^p + t^{p+1} = \frac{1 - t^{p+2}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{p+2}}{1-t}.$$

On obtient alors que : $\forall t \neq 1 \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

Maintenant pour $k \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0, 1/k]$. On peut donc intégrer les deux termes. Maintenant,

$$\int_0^{1/k} \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^{1/k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

De même,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/k} 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \frac{t^{p+2}}{1-t} dt &= \int_0^{1/k} 1 dt + \int_0^{1/k} t dt + \cdots + \int_0^{1/k} t^{p+1} dt + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \ldots + \frac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} \, \mathrm{d}t$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est croissante sur $[0, 1[$, donc

$$\forall t \in [0, 1/k], 0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1 - 1/k}$$

Maintenant, comme $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{1-1/k} \leqslant \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \leqslant 2 \int_0^{1/k} t^{p+2} dt = 2 \left[\frac{t^{p+3}}{p+3}\right]_0^{1/k} = \frac{2}{(p+3)k^{p+3}}$.

Comme de plus $\displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$ est positive, elle s'écrit bien sous la forme $\dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ où $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

L'égalité voulue est prouvée.

2) a) On sait que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k^{p+2}}$ est une série de Riemann convergente car $p+2 > 1$. On en déduit par comparaison pour les séries à termes positifs que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} |z_k|$ est convergente. Cela implique que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} z_k$ est absolument convergente donc convergente.

b) On se fixe $n \geqslant 1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{p+2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De ce fait pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{p+2}} dt.$$

En sommant pour k allant de $n+1$ à m (où $m \geqslant n+1$) on obtient via la relation de Chasles,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \int_{n}^{m} \frac{1}{t^{p+2}} dt = \left[-\frac{1}{(p+1)t^{p+1}} \right]_n^m = \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{m^{p+1}} \right) \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \geqslant n+1$. Il ne reste plus qu'a faire tendre m vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

c) On se fixe $n \geqslant 1$.

Soit $m \geqslant n+1$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{p+2}}.$$

Toutes les séries étant convergentes, en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{M}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Partie II

3) *Expression de* $\ln(n!)$ *à l'aide d'une suite.*

a) i) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t dt = \ln \left(\prod_{k=2}^{n} k \right) - \int_{1}^{n} \ln t dt = \ln(n!) - \int_{1}^{n} \ln t dt$$

On obtient donc : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k + \displaystyle\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t$.

ii) On sait que la fonction $t \mapsto \ln t$ admet pour primitive $t \mapsto t \ln t - t$ (sinon faire une intégration par parties). De ce fait

$$\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

b) i) Soit $k \geqslant 2$,

$$\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du = \int_0^1 \ln k du - \int_0^1 \ln(k-u) du = \ln k - \int_0^1 \ln(k-u) du$$

On procède alors au changement de variables $t = k - u$; $dt = -du$ dans l'intégrale obtenue.

$$\int_0^1 \ln(k-u) du = -\int_k^{k-1} \ln t dt = \int_{k-1}^{k} \ln t dt$$

Finalement, on a bien

$$\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t dt = v_k.$$

ii) Soit $k \geqslant 2$, on procède a une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))du$

On pose :

$$\alpha(u) = \ln k - \ln(k-u) \qquad \alpha'(u) = \frac{1}{k-u}$$
$$\beta(u) = u - \frac{1}{2} \qquad \beta'(u) = 1$$

Les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} v_k &= \int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))du \\ &= [(\ln k - \ln(k-u))(u-1/2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du \\ &= \frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du \end{aligned}$$

c) Soit $n \geqslant 2$. On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \sum_{k=2}^n v_k + \int_1^n \ln t dt \text{ (3.a.i)} \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - w_k\right) + n\ln n - n + 1 \text{ (3.a.ii et 3.b.ii)} \\ &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^n w_k \text{ (par téléscopage)} \end{aligned}$$

4) *Étude de la suite* $(w_k)_{k\geqslant 2}$.

a) On procède encore à une intégration par parties. On pose :

$$\alpha(u) = \frac{1}{k-u} \qquad \alpha'(u) = \frac{1}{(k-u)^2}$$
$$\beta(u) = \frac{1}{2}(u^2-u) \qquad \beta'(u) = u - 1/2$$

Les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Cela donne :

$$w_k = \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du = \left[\frac{u^2-u}{2(k-u)}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2-u}{(k-u)^2}du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}du.$$

b) Comme $u \mapsto \frac{1}{(k-u)^2}$ est croissante sur $[0,1]$, pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{1}{(k-u)^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$.
En voyant de plus que $u - u^2$ est positif sur $[0,1]$ on obtient que

$$0 \leqslant w_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}du \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2}\int_0^1 u - u^2 du = \frac{1}{2(k-1)^2}\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12(k-1)^2}.$$

c) La série de terme général w_k est à termes positifs. De plus on a que pour tout $k \geqslant 2$, $w_k \leqslant \frac{1}{12(k-1)^2}$. Maintenant, $\frac{1}{12(k-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12k^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann, on obtient que la série de terme général $\frac{1}{12(k-1)^2}$ converge, donc la série de terme général w_k converge aussi.

5) *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.

Soit $n \geqslant 1$. On reprend la formule vue en 3.c) :

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k.$$

Or, par définition, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = \sum_{k=2}^{+\infty} w_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \varepsilon_n$. On obtient alors que

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n.$$

6) *Majoration du reste* ε_n. On sait que pour tout $k \geqslant 2$, $0 \leqslant w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$. Posons donc $z_k = w_{k+1}$.

On a alors que $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^p+2}$ pour $M = \dfrac{1}{12}$ et $p = 0$.

En appliquant les résultats de 2), on obtient que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \frac{M}{p+1}\frac{1}{n^{p+1}} = \frac{1}{12n}$.

Maintenant, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k\right| = \left|\sum_{k=(n-1)+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \frac{1}{12(n-1)}$.

Partie III

7) *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.

— Première méthode : On utilise que

$$\begin{aligned} w_k = \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du &= \int_0^1 -1 + \frac{k-1/2}{k-u}du \\ &= -1 + (k-1/2)\left[-\ln(k-u)\right]_0^1 \\ &= -1 + (k-1/2)\left(-\ln(k) + \ln(k-1)\right) \\ &= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1 \end{aligned}$$

— Deuxième méthode : On a vu en 5) que

$$\varepsilon_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k &= \underbrace{\ln((k-1)!) - \ln(k!)}_{-\ln(k)} - (k-1)\ln(k-1) + k\ln(k) + k - 1 - k - \frac{1}{2}\ln(k-1) + \frac{1}{2}\ln k \\ &= -(k-1)(\ln(k-1) - \ln(k)) - 1 - \frac{1}{2}(\ln(k-1) - \ln(k)) \\ &= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1 \end{aligned}$$

8) a) On a montré en 1.b) que $-\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$. En utilisant la

question précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
w_k &= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-1=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{ik^i}+\frac{\alpha(k)}{k^{p+3}}\right)-1\\
&= \sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{ik^{i-1}}-\sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{2ik^i}-1+\frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k}\\
&= \sum_{i=0}^{p+1}\frac{1}{(i+1)k^i}-\sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{2ik^i}-1+\frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k}\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\frac{1}{(i+1)k^i}-\sum_{i=1}^{p+1}\frac{1}{2ik^i}-\frac{1}{2(p+2)k^{p+2}}+\frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k}\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\frac{i-1}{2i(i+1)k^i}-\frac{1}{2(p+2)k^{p+2}}+\frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k}\\
&= \sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}}+\frac{\delta(k)}{k^{p+2}}
\end{aligned}$$

en posant $b_i=\dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $\delta(k)=-\dfrac{1}{2(p+2)}+\alpha(k)\dfrac{k-\frac{1}{2}}{k}$.

b) On sait que $0\leqslant\alpha(k)\leqslant\dfrac{2}{p+3}$. On en déduit que

$$|\delta(k)|\leqslant\frac{1}{2(p+2)}+\frac{2k-1}{k}\frac{1}{p+3}$$

Maintenant, comme $p\geqslant 0$, $\dfrac{1}{2(p+2)}\leqslant\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{p+3}\leqslant\dfrac{1}{3}$. De plus $\dfrac{2k-1}{k}=2-\dfrac{1}{k}\leqslant 2$. Finalement,

$$|\delta(k)|\leqslant\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}\leqslant 1.$$

9) *Une première évaluation de* ε_n.

a) On utilise 1.a) pour $t=1/k$ et $p=0$. On a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2\left(1-\frac{1}{k}\right)}=1+\frac{1}{k}+\frac{\beta(k)}{k^2}$$

en posant $\beta(k)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{k}}=\dfrac{k}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}$. On en déduit que $\beta(k)$ est décroissant et que pour $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant 1\leqslant\beta(k)\leqslant 2$.

b) i) Pour $k\geqslant 2$,

$$|r_{k-1}-r_k|=\left|\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k-c_1\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right|.$$

Maintenant $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k=\dfrac{1}{12k^2}+\dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et $\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{1-1/k}-1\right)=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{\beta(k)}{k^2}\right)$. On a donc,

$$|r_{k-1}-r_k|=\left|\frac{1}{12k^2}+\frac{\delta(k)}{k^3}-\frac{c_1}{k^2}-\frac{c_1\beta(k)}{k^3}\right|.$$

On prend donc $c_1=\dfrac{1}{12}$ et on obtient $|r_{k-1}-r_k|=\left|\dfrac{\delta(k)}{k^3}-\dfrac{\beta(k)}{12k^3}\right|\leqslant\dfrac{1}{k^3}\left(1+\dfrac{2}{12}\right)=\dfrac{7}{6k^3}$.

ii) On pose $z_k = r_{k-1} - r_k$. On vient de voir que $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+1}}$ pour $M = 7/6$ et $p = 1$. En appliquant 2) on obtient que la série $\sum (r_{k-1} - r_k)$ converge, et que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\right| \leqslant \frac{M}{p+1}\frac{1}{n^{p+1}} = \frac{7}{12n^2}.$$

c) i) Soit $m \geqslant n+1$, par télescopage, $\sum\limits_{k=n+1}^{m} (r_{k-1} - r_k) = r_n - r_m$.

Maintenant, $r_m = \varepsilon_m - \dfrac{1}{12m}$ tend vers 0 car (ε_m) tend vers 0 (c'est la suite des restes d'une série convergente). Donc en faisant tendre vers $+\infty$ on obtient que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$.

ii) Par définition, pour $n \geqslant 1$, $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \underbrace{\dfrac{1}{12n} + r_n}_{\varepsilon_n}$

Or on a vu que $|r_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\right| \leqslant \dfrac{7}{12n^2}$, donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2} \text{ avec } |\lambda_1(n)| \leqslant \frac{7}{12}.$$

Problème II

1) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

a) La fonction tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ car sa dérivée $1 + \tan^2$ est croissante (car tan est croissante positive). Donc sa courbe représentative est au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation est $y = \tan(0) + \tan'(0)(x-0) = x$. Ainsi $\boxed{\tan(x) \geqslant x}$.

Comme $0 < \tan(x) \leqslant x$ alors $\frac{1}{\tan^2(x)} \geqslant \frac{1}{x^2}$ donc $\boxed{0 \leqslant \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x}$.

b) De même, par concavité de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (car $\sin'' = -\sin \leqslant 0$) on a $\boxed{\sin(x) \leqslant \sin(0) + \sin'(0)(x-0) = x}$.

Comme $0 < \sin(x) \leqslant x$, on a $\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x \leqslant 1}$.

c) Soit $p \geqslant 1$ et a, b deux réels,

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + b^{p-1}) = \boxed{(a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k}$$

d) Soit $p \geqslant 1$.

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x = \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2(x)\right)\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{x^{2(p-1-k)}}\cot^{2k}(x)$$

Or pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $0 \leqslant \cot^{2k}(x) \leqslant \frac{1}{x^{2k}}$ car $0 \leqslant \cot(x) \leqslant \frac{1}{x}$

De plus $0 \leqslant \dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x \leqslant 1$.

Ainsi $\boxed{0 \leqslant \dfrac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x \leqslant 1\sum\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{1}{x^{2(p-1-k)}}\dfrac{1}{x^{2k}} = \dfrac{p}{x^{2(p-1)}}}$

(On aurait aussi pu obtenir cet encadrement par accroissements finis de la fonction $x \mapsto x^{2p}$)

2) Soit $p \geqslant 1$. Comme $2p > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{2p}}$ converge donc la suite (T_n) de ses sommes partielles a une $\boxed{\text{limite finie}}$.

3) a) Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$.
En sommant membre à membre les encadrements de la question 1)d) en remplaçant x par $x_1(n), \ldots, x_n(n)$ qui appartiennent bien à $]0, \frac{\pi}{2}[$ on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k(n)^{2p}} - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^{2p}(x_k(n)) \leqslant p \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k(n)^{2(p-1)}}$$

c'est-à-dire :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^{2p}}{(k\pi)^{2p}} - S_p(n) \leqslant p \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^{2(p-1)}}{(k\pi)^{2(p-1)}}$$

et donc :

$$\boxed{0 \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} T_p(n) - S_p(n) \leqslant p \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} T_{p-1}(n)}$$

b) Divisant chaque membre de l'encadrement précédent par $n^{2p} > 0$ il vient :

$$0 \leqslant \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^{2p} T_p(n) - \frac{1}{n^{2p}} S_p(n) \leqslant p \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^{2(p-1)} \frac{T_{p-1}(n)}{n^2}$$

Or $\frac{2n+1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$. Si $p \geqslant 2$ alors $\frac{T_{p-1}(n)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\zeta(2(p-1))}{\infty} = 0$ et si $p = 1$ alors $\frac{T_{p-1}(n)}{n^2} = \frac{n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc par limite par encadrement

$$\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^{2p} T_p(n) - \frac{1}{n^{2p}} S_p(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et ainsi

$$\boxed{\frac{1}{n^{2p}} S_p(n) = \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^{2p} T_p(n) + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p} \zeta(2p)}$$

Partie II

Soit $n \geqslant 1$, on note P_n le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$.

4) $\boxed{\text{Le degré de } P_n \text{ est } n \text{ et son coefficient dominant est } (-1)^0\binom{2n+1}{1} = 2n+1}$.

5) a) Soit $\theta \in D$.

$$\begin{aligned}
\sin(2n+1)\theta &= \operatorname{Im}(e^{i(2n+1)\theta}) \\
&= \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \cos^{2n+1-p}\theta\, i^p \sin^p\theta\right) \\
&= \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \cos^{2n+1-p}\theta \sin^p\theta \operatorname{Im}(i^p)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin(2n+1)\theta &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n+1-(2k+1)}\theta \sin^{2k+1}\theta \,\mathrm{Im}(i.(-1)^k) \text{ car } i^p \text{ est réel si } p \text{ est pair} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n+1-(2k+1)}\theta \sin^{2k+1}\theta \\
&= (\sin^{2n+1}\theta) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2(n-k)}\theta \sin^{2(k-n)}\theta \\
&= (\sin^{2n+1}\theta) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \mathrm{cotan}^{2(n-k)}\theta \\
&= (\sin^{2n+1}\theta) P_n(\mathrm{cotan}^2\theta)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{P_n(\mathrm{cotan}^2(\theta)) = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}}$$

b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k(n) \in D$. En utilisant ce qui précède,

$$P_n(\mathrm{cotan}^2(x_k(n))) = \frac{\sin k\pi}{\sin^{2n+1}(x_k(n))} = 0$$

On en déduit que les $\mathrm{cotan}^2(x_k(n)))$ sont racines de P_n.
Or cotan est positive et injective (car strictement décroissante) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc les $\mathrm{cotan}^2(x_k(n)))$ sont deux à deux distincts lorsque k parcourt $[\![1, n]\!]$. Donc P_n est divisible par le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - \mathrm{cotan}^2(x_k(n)))$.
De plus le quotient est de degré $n - n = 0$ et son coefficient dominant est $\frac{2n+1}{1} = 2n + 1$.

Ainsi $\boxed{P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} (X - \mathrm{cotan}^2(x_k(n)))}$.

6) a) D'après les relations coefficients-racines, $\sigma_k(n)$ est égal à $(-1)^k$ fois le coefficient de X^{n-k} dans P_n divisé par celui de X^n, c'est-à-dire :

$$\boxed{\sigma_k(n) = (-1)^k \frac{(-1)^k \binom{2n+1}{2k+1}}{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2(n-k))!}}$$

b) La formule ci-dessus peut se réécrire :

$$\sigma_k(n) = \frac{(2n)(2n-1)\dots(2n-2k+1)}{(2k+1)!}$$

et ainsi $\boxed{\sigma_k \text{ est polynomiale (de degré } 2k) \text{ à coefficients rationnels}}$ (comme produit de fonctions polynomiales à coefficients entiers divisé par un entier).

7) On admet que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant p$,

$$S_p(n) - \sigma_1(n) S_{p-1}(n) + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}(n) S_1(n) + (-1)^p \sigma_p(n)\, p = 0$$

(démonstration de cette formule dite de (Newton-)Girard en fin de corrigé)

a) On procède par récurrence forte sur p.

— Initialisation : Pour $p = 1$. On voit que $S_1 = \sigma_1$ est polynomiale à coefficients rationnels par la question précédente.

— Hérédite : Soit $p \geqslant 2$ entier. On suppose que $S_1, \ldots, S_{p-1}$ sont polynomiales à coefficients rationnels sur $[\![1, \infty[\![$, …, $[\![p-1, \infty[\![$

Par la relation admise,

$$\forall n \geqslant p \quad S_p(n) = \sigma_1(n)S_{p-1}(n) - \ldots - (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}(n)S_1(n) - (-1)^p p\sigma_p(n)$$

Par hypothèse de récurrence et par la question précédente, $\boxed{S_p \text{ est polynomiale à coefficients rationnels}}$ sur $[\![p, \infty[\![$.

b) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$.

Par la question précédente,

$$\forall n \geqslant p \quad S_p(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k n^k$$

où (a_k) est une suite de rationnels nuls à partir d'un certain rang.

D'après la dernière question de la première partie,

$$\zeta(2p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} \lim_{n\to\infty} \frac{S_p(n)}{n^{2p}}$$

Donc le degré d de S_p est au plus $2p$ car sinon $\frac{S_p(n)}{n^{2p}} \underset{n\to\infty}{\sim} a_d n^{d-2p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$. Finalement $\zeta(2p) = (\frac{\pi}{2})^{2p} a_{2p}$.

Ainsi $\boxed{\zeta(2p) \text{ est le produit de } \pi^{2p} \text{ et d'un rationnel}}$.

c) Dans le cas $p = 1$.

$$\zeta(2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{S_1(n)}{n^2}$$

avec $S_1(n) = \sigma_1(n) = \frac{(2n)(2n-1)}{3!}$

Ainsi $\zeta(2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \frac{4}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$.

$$\zeta(4) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \lim_{n\to\infty} \frac{S_2(n)}{n^4}$$

avec $S_2(n) = \sigma_1(n)S_1(n) - 2\sigma_2(n) = \left(\frac{(2n)(2n-1)}{3!}\right)^2 - 2\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}$ dont le coefficient de n^4 est $(\frac{2}{3})^2 - \frac{32}{120} = \frac{4}{9} - \frac{4}{15} = 4.\frac{5-3}{45} = \frac{8}{45}$.

Ainsi $\zeta(4) = \boxed{\frac{\pi^4}{90}}$.

<u>Démonstration de la formule de Girard, qui s'applique à n'importe quels complexes $y_1, \ldots, y_n$</u>

Notons

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} y_{i_j} \quad \text{et} \quad s_q = \sum_{i=1}^{n} y_i^q$$

et montrons que pour $p \leqslant n$,

$$s_p - \sigma_1 s_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}s_1 + (-1)^p \sigma_p\, p = 0$$

• Commençons par traiter le cas où $n = p$.

Notant $P = (X - y_1)\ldots(X - y_p) = X^p - \sigma_1 X^{p-1} + \ldots + (-1)^p \sigma_p X^0$, on a pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$0 = P(y_i) = y_i^p - \sigma_1 y_i^{p-1} + \ldots + (-1)^p \sigma_p$$

Sommant ces égalités membres à membre lorsque i parcourt $[\![1,p]\!]$, on obtient

$$0 = s_p - \sigma_1 s_{p-1} + \ldots + (-1)^p \sigma_p\, p$$

• Passons au cas général ($p \leqslant n$). La demonstration qui suit est assez subtile et fait intervenir des polynômes à plusieurs indéterminées (hors-programme).
Remarquons que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, σ_k est somme de monômes de degré k en $y_1, \ldots, y_n$. Formellement on introduit les polynômes à n indéterminées $\sigma_k(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant p} \prod_{j=1}^{k} Y_{i_j}$.
Ici un monôme est un produit d'indéterminées, non nécessairement distinctes, et son degré est le nombre de ses facteurs.
De même pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, s_q est somme de monômes de degré q.
Donc $Q(Y_1, \ldots, Y_n) = s_p - \sigma_1 s_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1} s_1 + (-1)^p \sigma_p\, p$ est combinaison linéaire (à coefficients entiers) de monômes de degré p
Considérons un monôme quelconque $Y_{i_1}^{m_1} \ldots Y_{i_p}^{m_p}$ (avec $i_1 < \ldots < i_p \in [\![1,n]\!]$ et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}$ tels que $m_1 + \ldots + m_p = p$) de degré p des indéterminées $Y_1, \ldots, Y_n$. Remarquons que le coefficient de ce monôme dans Q est le même que le coefficient de ce même monôme dans

$$Q'(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_p}) = s'_p - \sigma'_1 s'_{p-1} + \ldots + (-1)^p \sigma'_p\, p$$

où

$$\sigma'_k = \sum_{1 \leqslant \ell_1 < \ldots < \ell_k \leqslant p} \prod_{j=1}^{k} Y_{i_{\ell_j}} \quad \text{et} \quad s'_q = \sum_{\ell=1}^{p} Y_{i_\ell}^q$$

Ici le "prime" ne désigne pas une dérivation mais la substitution de $(0, \ldots, Y_{i_1}, 0, \ldots, Y_{i_2}, 0, \ldots, Y_{i_p}, \ldots, 0)$ à $(Y_1, \ldots, Y_n)$.
Par exemple le coefficient de $Y_1^2 Y_4 = Y_1^2 Y_2^0 Y_4^1$ est le même dans

$$\begin{aligned} Q &= (Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2) \\ &+ (Y_1Y_2 + Y_1Y_3 + Y_1Y_4 + Y_2Y_3 + Y_2Y_4 + Y_3Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ &- (Y_1Y_2Y_3 + Y_1Y_2Y_4 + Y_1Y_3Y_4 + Y_2Y_32Y_4).3 \end{aligned}$$

et dans

$$Q' = (Y_1^3 + Y_2^3 + Y_4^3) - (Y_1 + Y_2 + Y_4)(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_4^2) + (Y_1Y_2 + Y_1Y_4 + Y_2Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_4) - Y_1Y_2Y_4.3$$

car substituer 0 à Y_3 dans l'expression de Q ne modifie pas le coefficient de $Y_1^2 Y_4$.
Or Q' est nul d'après le premier point de cette démonstration, donc ses coefficients sont nuls.
Ainsi tous les coefficicients de Q sont nuls, donc Q est nul.