Devoir libre 3

Exercice I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$.
Calculer l'intégrale pour $\alpha = 2$.

Exercice II

On pose pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\text{cotan}(x)dx \text{ et } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x}dx.$$

1) Montrer que les intégrales u_n et v_n existent.
2) Montrer que u_n ne dépend pas de n.
3) On considère sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $h : x \mapsto \text{cotan}(x) - \dfrac{1}{x}$
   a) Montrer que h se prolonge par continuité en 0. On note encore h le prolongement.
   b) Montrer que h est alors une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
4) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(px)dx = 0.$$

   En déduire que $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
5) a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.
   b) Calculer I.
6) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}dx$.