Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathscr{L}(E)$ si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathscr{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathscr{A}$. (Contrairement à la définition du programme, on ne demande pas que id_E appartienne à $\mathscr{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathscr{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est dite *diagonalisable* s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $Mat_{\mathscr{B}}(u)$ soit diagonale pour tout u de $\mathscr{A}$.

On dit qu'une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{A}$, $AB = BA$. Une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathscr{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale.

On désigne par $T_n(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

Partie I - Exemples de sous-algèbres

1) Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?
2) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathscr{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathscr{A}_F = \{u \in \mathscr{L}(E) \ , \ u(F) \subset F\}$.
   a) Montrer que $\mathscr{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
   b) Montrer que $\dim \mathscr{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
   On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathscr{A}_F$ est triangulaire par blocs.
   c) Déterminer $\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1}(n^2 - pn + p^2)$.
3) Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
   a) Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
   b) Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   c) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie II - Une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4) Préciser les matrices J^k pour $k \in \mathbb{N}$

5) Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

6) Montrer que $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une base de $\mathscr{A}$.

7) Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

8) Déterminer les valeurs propres de J ainsi que les vecteurs propres associés.
En déduire que J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

9) Montrer que $\mathscr{A}$ est diagonalisable.

10) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?
On pourra introduire le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Partie III - Sous-algèbres strictes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ strictement incluse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

11) Montrer que l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne $A^\perp = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall A \in \mathscr{A}, \langle A, M\rangle = 0\}$ l'orthogonal de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $\mathscr{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note r sa dimension.

12) Quelle relation a-t-on entre d et r ?

Jusqu'à la fin de cette partie III, on fixe une base $(A_1, \ldots, A_r)$ de $\mathscr{A}^\perp$.

13) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que M appartient à $\mathscr{A}$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i, M\rangle = 0$.

14) Montrer que pour toute matrice $N \in \mathscr{A}$ et tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N^\top A_i \in \mathscr{A}^\perp$.

Soit $\mathscr{A}^\top = \{M^\top | M \in \mathscr{A}\}$.

15) Montrer que $\mathscr{A}^\top$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathscr{A}$.

On note $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. On rappelle qu'à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est associé canoniquement l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X \mapsto MX$.

16) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $F = \operatorname{Vect}(A_1X, \ldots, A_rX)$. Montrer que F est stable par les endomorphismes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associés aux éléments de $\mathscr{A}^\top$.

17) Montrer que $d \leqslant n^2 - n + 1$ et conclure.