On rappelle le résultat suivant (qui n'est pas explicitement au programme mais qu'il faudrait savoir redémontrer aux concours) : si pour tout entier n on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ alors il existe un réel γ tel que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

En particulier,

$$H_n \sim \ln(n).$$

Exercice I

1) a) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier $k \geqslant n_0$,

$$\frac{\ln(k-1)}{k-1} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t} dt \geqslant \frac{\ln k}{k}$$

b) En déduire que la série $\sum_{k \geqslant n_0} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln k}{k} \right)$ est à termes positifs et que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln k}{k} \right) \leqslant \frac{\ln(n_0 - 1)}{n_0 - 1}$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ converge.

2) Soit $p \geqslant 1$, exprimer la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{2p} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ à l'aide u_p, u_{2p} et H_p.

3) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice II

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \beta_n.$$

On suppose que $\alpha > 0$ et que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \beta_n$ est absolument convergente.

1) Montrer que

$$\ln \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \right) = -\frac{\alpha}{n} + w_n$$

où $\sum w_n$ est une série absolument convergente

2) Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ indépendante de n telle que $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$

3) **Application :** soit $u_n = \sqrt{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ $(n \geqslant 1)$

a) Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

b) Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.