Exercice I

1) Posons, $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ définie sur $]0,+\infty[$. Cette fonction est dérivable et pour tout $t > 0$, $f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$. La fonction est donc décroissante à partir sur $[e,+\infty[$.
Pour $n_0 = 4$ et $k \geqslant n_0$, la fonction f est décroissante sur $[k-1,k] \subset [e,+\infty[$ donc

$$\frac{\ln(k-1)}{k-1} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t} dt \geqslant \frac{\ln k}{k}$$

2) On pose pour $k \geqslant n_0 = 4$, $v_k = \left(\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt\right) - f(k) \geqslant 0$. La série $\sum\limits_{k \geqslant n_0} v_k$ est une série à termes positifs.
De plus, en utilisant la question précédente, pour tout $k \geqslant n_0$,

$$v_k = \left(\int_{k-1}^{k} f(t)dt\right) - \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(k-1)}{k-1} - \frac{\ln(k)}{k}$$

de telle sorte que pour $n \geqslant 4$, par téléscopage,

$$\sum_{k=4}^{n} v_k \leqslant \sum_{n=4}^{n} \frac{\ln(k-1)}{k-1} - \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{\ln(3)}{3}$$

Cela montre que la série $\sum\limits_{k \geqslant n_0} v_k$ est convergente en tant que série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées.

3) Calculons les sommes partielles de la série $\sum\limits_{k \geqslant n_0} v_k$. Pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\sum_{k=4}^{n} v_k = \int_{3}^{n} \frac{\ln(t)}{t} dt - \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_3^n - \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + A$$

où $A = -\frac{1}{2}(\ln 3)^2 + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$.
Finalement, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n = \sum\limits_{k=4}^{n} v_k - A$. Comme la série $\sum\limits_{k \geqslant n_0} v_k$ converge, la suite (u_n) est convergente.

4) Soit $p \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{\ln k}{k} - \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{\ln k}{k} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2p} \frac{\ln k}{k}.$$

Or

$$2 \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\ln(2i)}{2i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\ln i}{i} + (\ln 2) H_p.$$

où H_p est la p-ième somme partielle de la série harmonique. Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k \frac{\ln k}{k} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\ln i}{i} + (\ln 2) H_p - \sum_{i=1}^{2p} \frac{\ln i}{i} \\ &= \frac{1}{2}(\ln p)^2 - u_p - \frac{1}{2}(\ln(2p))^2 + u_{2p} + (\ln 2) H_p \end{aligned}$$

5) Posons, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

En utilisant que $H_p = \ln p + \gamma + o(1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_{2p} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\ln i}{i} + (\ln 2) H_p - \sum_{i=1}^{2p} \frac{\ln i}{i} \\
&= \frac{1}{2}(\ln p)^2 - u_p - \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln p)^2 + u_{2p} + (\ln 2)\ln p + (\ln 2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{(\ln p)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - (\ln 2)(\ln p) - \frac{(\ln p)^2}{2} + (\ln 2)\ln p + (\ln 2)\gamma + o(1)
\end{aligned}$$

puisque (u_p) et (u_{2p}) convergent toutes les deux vers la limites de la suite (u_n).
Finalement

$$\lim_{p \to +\infty} S_{2p} = (\ln 2)\gamma - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Comme de plus, $S_{2p+1} = S_{2p} - \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$ et que $\lim_{p\to+\infty} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1} = 0$, on obtient que (S_{2p+1}) tend vers cette même limite. On en déduit la somme de la série :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = (\ln 2)\gamma - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Exercice II

1) Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) &= \ln(1 + h_n) \quad \text{avec } h_n = -\frac{\alpha}{n} + \beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\
&\qquad \text{car la série } \sum \beta_n \text{ converge donc son terme général tend vers } 0 \\
&= h_n + \underset{n\to\infty}{O}(h_n^2) \\
&= -\frac{\alpha}{n} + w_n
\end{aligned}$$

avec $w_n = \beta_n + O(h_n^2)$
Or

$$0 \leqslant h_n^2 = \frac{\alpha^2}{n^2} - 2\frac{\alpha}{n}\beta_n + \beta_n^2 = \frac{\alpha^2}{n^2} + O(\beta_n)$$

car $(\frac{\alpha}{n})$ et (β_n) sont bornées puisqu'elles convergent (vers zéro, donc on aurait pu écrire un petit o, mais ce n'est pas nécessaire).
Ainsi la série $\sum h_n^2$ converge donc la série $\sum O(h_n^2)$ converge absolument.
Finalement, la série $\sum w_n$ converge absolument.
On pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \beta_n\right) &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{\beta_n}{1 - \frac{\alpha}{n}}\right) \\
&= -\frac{\alpha}{n} + O(1/n^2) + O(\beta_n)
\end{aligned}$$

2) On a donc pour tout $n \geqslant 0$

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_0}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\alpha}{k} + w_k\right)$$

d'où

$$\ln u_n = \ln u_0 - \alpha(\ln n + \gamma + o(1)) + S + o(1)$$

où on a noté $S = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$, et ainsi

$$u_n = u_0 e^{-\alpha\gamma + S} e^{o(1)} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{A}{n^\alpha}$$

avec $A = u_0 e^{-\alpha\gamma+S} > 0$, car $e^{o(1)} \underset{n\to\infty}{\to} e^0 = 1$ par continuité de la fonction exponentielle.

3) a) La suite (u_n) est bien à termes strictement positifs, et

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\frac{1}{(\sqrt{n})^3} + O\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^5}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum O(\frac{1}{n^2})$ converge absolument.
D'après la question précédente, il existe donc un réel strictement positif A tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{1/6}}$.
Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^{1/6}}$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge.

b) La série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée. De plus, $u_n \sim \frac{A}{n^{1/6}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Enfin $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 - \frac{1}{6n} + o(\frac{1}{n})$ donc $\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 \sim -\frac{1}{6n} < 0$, donc $\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 < 0$ à partir d'un certain rang n_0.
Donc la série $\sum((-1)^n u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge par le théorème des séries alternées, donc $\sum((-1)^n u_n)_{n\geqslant 1}$ converge également.
Remarque : on pouvait aussi utiliser l'égalité des accroissements finis ou la concavité de sin sur $[0,\pi]$ pour affirmer que $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant 1$ dès le rang 2.