Exercice 136

Soit E l'espace des matrices symétriques d'ordre n à coefficients complexes et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice fixée.
On pose $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi : M \longmapsto A^\top M + MA$.
Vérifier que φ est un endomorphisme de E et calculer $\mathrm{tr}(\varphi)$.

Correction : Comme le produit matriciel est bilinéaire, l'application φ est linéaire. De plus si $M \in E$ alors

$$\varphi(M)^\top = (A^\top M + MA)^\top = M^\top A + A^\top M^\top = \varphi(M)$$

Cela montre que $\varphi(M) \in E$ et donc $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$. On pose $\Delta_i = E_{ii} \in E$. De plus, pour $j > i$ on pose $S_{ij} = E_{ij} + E_{ij} \in E$. On vérifie facilement que la famille ainsi construite est une base de E. On en déduit que

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^* \left(\varphi(\Delta_i)\right) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} S_{ij}^* \left(\varphi(S_{ij})\right)$$

On voit alors par la formule du calcul matriciel que

$$\Delta_i^* \left(\varphi(\Delta_i)\right) = (A^\top \Delta_i)[i,i] + (\Delta_i A)[i,i] = 2A[i,i]$$

De même, pour $i < j$,

$$S_{ij}^* \left(\varphi(S_{ij})\right) = (A^\top S_{ij})[i,j] + (S_{ij}A)[i,j] = A[i,i] + A[j,j]$$

Finalement

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} 2A[i,i] + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} A[i,i] + A[j,j] = \mathrm{tr}(A) + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A[i,i] = (n+1)\mathrm{tr}(A)$$

Exercice 158

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $E_n = \mathbf{C}_n[X]$, soit f l'application linéaire définie sur $\mathbf{C}[X]$ par :

$$f \ : P \longmapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

Montrer que f induit un isomorphisme de E'_n sur E_{n-2} où $E'_n = \{P \in E_n / P(0) = P'(0) = 0\}$.

Correction : On sait que $\mathscr{B} = (X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-2}$ est une base de E_{n-2} et que $\mathscr{C} = (X^k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E'_n.
Il suffit de « calculer » la matrice de f dans ces bases.
Pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} f(X^k) &= (X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k \\ &= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (1 + (-1)^{k-p}) X^p - 2X^k \\ &= \sum_{p=0}^{k-2} \binom{k}{p} (1 + (-1)^{k-p}) X^p \\ &= 2\binom{k}{k-2} X^{k-2} + R_k \end{aligned}$$

où R_k est un polynôme de degré strictement inférieur à k. On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & * & \cdots & * \\ 0 & 6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & n(n-1) \end{pmatrix}$$

La matrice étant inversible, f est un isomorphisme.

Exercice 160

1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
   Montrer que : f est injective (resp. surjective) si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = id_E$ (resp. $f \circ g = id_F$).
2. *Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(E,G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F,G)$ vérifiant $g = h \circ f$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.*

Correction :

1. Montrons que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   — $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$,

   $$x = g(f(x)) = g(0) = 0$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et donc f est injective

   — $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective. On va « construire » via son action sur une base de F. Pour cela on considère une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\mathrm{Im}(f) \in F$ que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
   Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$, il existe $u_i \in E$ tel que $f(u_i) = e_i$. On considère alors g une application linéaire telle que pour $i \leqslant p$, $g(e_i) = u_i$ (ce qui est nécéssaire car on veut que $g(e_i) = g(f(u_i)) = u_i$) et $g(e_i) = 0$ si $i > p$ (ceci est un choix arbitraire).
   Vérifions que g vérifie que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $w \in E$. On peut décomposer $f(w)$ sous la forme $f(w) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$ et donc

   $$g(f(w)) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

   Or,

   $$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = f(w)$$

   Par injectivité de f, $w = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ et donc $g(f(w)) = w$.
   Remarque : on peut aussi rédiger en utilisant le cours de première année. On sait que f induit un isomorphisme d'un supplémentaire du noyau de f dans $\mathrm{Im}(f)$. Il induit donc un isomorphisme $\check{f}$ de E dans $\mathrm{Im}(f)$. Il suffit donc de prendre pour g un prolongement quelconque à F de $(\check{f})^{-1}$.

   Montrons que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
   — $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Pour $y \in F$, $y = f(g(y)) \in \mathrm{Im}(f)$; cela montre que f est surjective.
   — $\boxed{\Rightarrow}$ Là encore, en utilisant le cours de première année, il existe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ tel que f induit un isomorphisme $\check{f}$ de S sur $\mathrm{Im}(f) = F$. Il suffit de poser $g = (\check{f})^{-1}$ en la voyant comme application linéaire de F dans E et non pas de F dans S.

2. Là encore le sens réciproque est presque immédiat. Montrons que si $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, il existe $h \in \mathscr{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$. On sait que f induit un isomorphisme d'un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathrm{Im}(f)$. Notons en $\check{f}$ cet isomorphisme. Posons alors h un prolongement à tout F de $g \circ (\check{f})^{-1}$. Il faut vérifier que $g = h \circ f$.
   Soit $w \in E$, on peut écrire $w = s + k$ où $s \in S$ et $k \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors
   $$(h \circ f)(w) = (h \circ f)(s) = g \circ (\check{f})^{-1} \circ \check{f}(s) = g(s) = g(w)$$
   La dernière égalité vient du faire que $g(k) = 0$ car $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.