Exercice 166 (fin)

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -id$.

1. *Montrer que l'application*

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & a\,x + b\,f(x) \quad \text{où } a = \mathrm{Re}(\lambda),\ b = \mathrm{Im}(\lambda) \end{cases}$$

confère à E une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ soit

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Réciproquement, montrer que si n est pair, il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -id$.*

Correction :

1. Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ et $x \in E$, notons $\lambda.x = ax + bf(x)$ où $\lambda = a + ib$ avec a, b des réels. Vérifions que E (avec son addition et cette loi externe) est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
   - On a encore $(E, +)$ qui est un groupe abélien
   - Soit $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}$ et $x, y \in E$,
   $$\lambda.(x+y) = a(x+y) + bf(x+y) = ax + bf(x) + ay + bf(y) = \lambda.x + \lambda.y$$
   - Soit $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}, \mu = c + id \in \mathbf{C}$ et $x \in E$,
   $$(\lambda + \mu).x = (a+c)x + (b+d)f(x) = ax + bf(x) + cx + df(x) = \lambda.x + \mu.x$$
   - Soit $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}, \mu = c + id \in \mathbf{C}$ et $x \in E$,
   $$\lambda.(\mu.x) = a(cx + df(x)) + bf(cx + df(x)) = acx + adf(x) + bcf(x) + bdf^2(x)$$
   or
   $$(\lambda \times \mu).x = (ac - bd)x + (ad + bc)f(x)$$
   Comme $f^2 = -\mathrm{id}$, on a bien $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$.

   On a bien montré que E pouvait être muni d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E pour la structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Montrons que $(e_1, f(e_1), \ldots, e_p, f(e_p))$ est une base de E pour la structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
   - Génératrice : soit $w \in E$, par définition, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}$ tels que $w = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_p.e_p$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ on pose $a_k = \mathrm{Re}(\lambda_k)$ et $b_k = \mathrm{Im}(\lambda_k)$. On a alors
   $$w = a_1 e_1 + b_1 f(e_1) + \cdots + a_p e_p + b_p f(e_p) \in \mathrm{Vect}(e_1, f(e_1), \ldots, e_p, f(e_p))$$

— Libre : En procédant de même une $\mathbf{R}$-relation de dépendance linéaire non triviale sur les vecteurs $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$ permet de construire une $\mathbf{C}$-relation de dépendance linéaire non triviale sur les vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$. On en déduit que la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$ est libre.

On a obtenu qu'il existait une base de E de la forme $(e_1, f(e_1), \dots, e_p, f(e_p))$. Dans cette base, la matrice de f est de la forme cherchée.

2. On suppose que E est de dimension pair $n = 2p$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On considère l'application f définie par sur la base par

$$f : e_i \mapsto \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i \text{ est impair} \\ -e_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $f \circ f = -\mathrm{id}$.