Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. En pratique tout (ou presque) restera vrai si $\mathbf{K}$ est un corps en général.

1. Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel un triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble, $+$ une loi interne de E et $.$ une loi externe :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \quad et \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array}$$

Vérifiant

- *$(E, +)$ est un groupe abélien*
- *La loi $.$ vérifie*
  - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$
  - $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$
  - $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$
  - $\forall u \in E, 1.u = u$

Définition 1.1.2 (Sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on appelle sous-espace vectoriel de E une partie $F \subset E$ telle que les lois $+$ et $.$ induisent une structure d'espace vectoriel sur F.

Proposition 1.1.3 (Caractérisation d'un sous espace vectoriel)

Soit $F \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \lambda u + \mu v \in F$

1.2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.2.4 (Famille presque nulle)

Soit $(X,+)$ un groupe abélien et I un ensemble. On appelle famille presque nulle $(x_i)_{i\in I}$ toute famille d'éléments de X indexée par I telle qu'il existe J une partie finie de I vérifiant que pour tout $i \in I \setminus J$, $x_i = 0$.
On note $X^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de X.
Pour $(x_i)_{i\in I} \in X^{(I)}$ on peut définir la somme $\sum\limits_{i\in I} x_i$ comme étant $\sum\limits_{i\in J} x_i$.

Définition 1.2.5 (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ est une famille presque nulle de scalaires.

Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1 ; n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
Notation : On note $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I})$ l'ensemble des combinaisons linéaires. C'est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les éléments de la famille. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille.
Exercice : On considère l'espace vectoriel des suites $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On pose $u(i) = (\delta_{i,n})_{n\geqslant 0}$. Déterminer $\mathrm{Vect}(u(i))_{i\in\mathbf{N}}$

Définition 1.2.6 (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.
C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I} \text{ libre }) \iff \left(\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0\right)$$

Proposition 1.2.7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie $(u_j)_{j\in J}$ est libre.

Exercices :

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrer que la famille $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est libre.
2. On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

Définition 1.2.8 (Famille génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Exemple : La famile $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ engendre $\mathbf{K}[X]$.

Définition 1.2.9

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème 1.2.10

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque : Le fait que la famille est génératrice implique qu'il existe (au moins une) famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. Le fait qu'elle soit libre implique qu'il existe au plus une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$.

En effet s'il y en a deux distinctes en faisant la différence on trouve une famille encore presque nulle $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \mu_i u_i = 0$.

Définition 1.2.11 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les **coordonnées** *de w dans la base $\mathscr{B}$.*

Remarque culturelle : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base.

Si on accepte l'axiome du choix, il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Ce résultat n'est pas au programme de CPGE.

Exercice : Déterminer une base de $C(X)$.

ATTENTION

Quand on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$, les vecteurs sont des n-uplets : $u = (x_1, \dots, x_n)$ où $x_1, \dots, x_n$ sont les **composantes** du vecteurs.
Il y a une base dite canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les **coordonnées** du vecteur u dans cette base sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ car

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Mais si on considère les coordonnées de ce vecteur dans une autre base, elles ne seront plus égales aux composantes.

Définition 1.2.12 (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$. On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.

Proposition 1.2.13

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si E est de dimension finie n. Alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.
2. Si $\mathscr{F}$ est de cardinal n. Alors $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.

Proposition 1.2.14

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

1. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E)) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ engendre E).
2. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F}) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est libre).
3. On a $(\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F} = \dim E) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est une base de E).

1.3 Rang d'une application linéaire

Définition 1.3.15

Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $\mathrm{rg}(u)$ la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ quand elle est finie. On a donc

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

Proposition 1.3.16

Soit u une application linéaire de E dans F et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

1. La famille image $u(\mathscr{F})$ engendre $\mathrm{Im}(u)$.
2. On a donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{F}))$ (dans le cas où ce sont des nombres finis).

Remarque : On utilisera ce résultat essentiellement avec $\mathscr{F}$ une base de E.

Exercice : Déterminer le rang de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.3.17

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\mathrm{Ker}\left(u_{|S}\right) = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{u} : & S & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Corollaire 1.3.18 (Théorème du rang)

Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ admet un supplémentaire S
2. On a
$$\dim S = \dim(\mathrm{Im}(u)) \text{ et donc } \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg} u = \dim E$$

Proposition 1.3.19

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u \text{ est surjective})$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u \text{ est injective})$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u \text{ est bijective})$

Proposition 1.3.20

Soit $u : F \longrightarrow G$ et $v : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(v)$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v)$
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u)$

2. Rappels sur les matrices

Faisons quelques rappels sur les matrices

2.1 Changements de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases.

Définition 2.1.21 (Matrice de changement de bases)

On appelle matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On la note souvent $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On a donc

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$$

Théorème 2.1.22 (Changement de bases pour les vecteurs)

Soit w un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(w)$ ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a $X = PX'$.

ATTENTION

La matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet de calculer simplement les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ à partir de celles du vecteur dans la base $\mathscr{B}'$.

On se donne de plus un autre espace vectoriel F avec des bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$.

Théorème 2.1.23 (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Démonstration : On peut illustrer cette formule par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
PX' = X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \arrow[r, "\times A"] & APX' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u(w)) \arrow[d, "\times Q^{-1}"] \\
X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) \arrow[u, "\times P"] \arrow[r, "\times A'"] & A'X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}'}(u(w)) = Q^{-1}APX'
\end{tikzcd}$$

□

Dans le cas où on regarde des endomorphismes et non plus des applications linéaires générales, on utilise quasi-systématiquement la même base pour l'espace de départ et d'arrivé (afin que la composition des endomorphismes corresponde au produit des matrices). On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ pour $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Corollaire 2.1.24 (Cas des endomorphismes)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a alors

$$A' = P^{-1}AP$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2.2 Matrices semblables

Définition 2.2.25 (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

ATTENTION

Ne pas confondre semblables et équivalentes. Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang, ce qui revient au fait qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2$ tel que

$$A' = PAQ$$

Exemple : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

Proposition 2.2.26

La relation « est semblable » est une relation d'équivalence.

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. □

Remarque : Soit A une matrice, l'ensemble des matrices semblables à A forment ce que l'on appelle sa classe de similitude.

Note

Cela signifie que si u est un endomorphisme de E et si A est **une** matrice de u dans **une** base $\mathscr{B}$ de E, la classe de similitude de A est l'ensemble des matrices A' telles qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = A'$$

La suite du cours consiste à expliquer comment choisir la matrice « la plus simple ».

2.3 Trace

Définition 2.3.27 (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 2.3.28 (Propriétés de la trace)

1. La trace est une forme linéaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Démonstration :

1. Evident
2. Evident
3. Calcul à faire en exercice.

□

Exercice : Calculer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}(A^\top A)$.

ATTENTION

La trace d'un produit n'est pas (en général) le produit des traces.

Corollaire 2.3.29

Soit A et B deux matrices semblables, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Démonstration : Par définition si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en tire que

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

□

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.
2. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

Proposition-Définition 2.3.30

Soit u un endomorphisme de E (espace vectoriel de dimension finie). Pour toute base $\mathscr{B}$ la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la même. On l'appelle la trace de u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.