Partie I :

1. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, par téléscopage,

$$\sum_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1) = n\ln n - 1\ln 1 = n\ln n$$

(b) Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\ln(n!) - n\ln &= \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ln(k-1) - (k-1)\ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

2. Pour $k \longrightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
(k-1)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= (k-1)\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\
&= -1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= -1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

3. On pose $\alpha_k = (k-1)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 - \frac{1}{2k}$ de sorte que $\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2}$ et que

$$(k-1)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - n\ln n = \sum_{k=2}^{n} -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k = -(n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$$

Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$$

4. (a) Comme $(\alpha_k) \sim \frac{1}{6k^2}$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \alpha_k$ converge. Si on note S sa somme on a donc pour $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k = S + o(1)$.

En utilisant la propriété donnée dans la question,

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma - 1) + S + o(1)$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n = \frac{\gamma + 1}{2} + S + o(1)$$

et donc, en posant $C = \frac{\gamma+1}{2} + S$,

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow C$$

(b) En prenant l'exponentielle et en notant $K = \exp(C)$, on a

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \exp\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow K$$

et donc

$$n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

Partie II :

1. (a) On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

(b) Pour $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t)^{n+1} dt \\
&= \left[-\cos t \times (\sin t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times (\sin t)^n dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \times (\sin t)^n dt \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

(c) Par une récurrence immédiate on a pour $p \geqslant 0$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times I_{2p-2} = \cdots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{1}{2} I_0$$

et donc

$$I_{2p} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k - 1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} k}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même,

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

2. (a) Pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{n+1}-(\sin t)^n dt=\int_0^{\pi/2}(\sin t-1)(\sin t)^n dt\leqslant 0$$

car pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t-1)(\sin t)^n\leqslant 0$.
La suite (I_n) décroit.

(b) La formule trouvée en 1.b) montre que

$$\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$$

et donc $I_n\sim I_{n+2}$.
En utilisant maintenant la décroissance de la suite (I_n),

$$I_{n+2}\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$$

En divisant par $I_n>0$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant 1$$

Par le théorème d'encadrement, $\frac{I_{n+1}}{I_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$ et donc $I_{n+1}\sim I_n$.

(c) On pose $\theta_n=(n+1)I_nI_{n+1}$.
Pour tout entier naturel n,

$$\theta_{n+1}=(n+2)I_{n+1}I_{n+2}=(n+2)I_{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}I_n=\theta_n$$

La suite (θ_n) est constante égale à $\theta_0=I_0.I_1=\frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $I_n.I_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}$.
En utilisant la question précédente, on a donc

$$I_n^2\sim I_n.I_{n+1}\sim\frac{\pi}{2(n+1)}\sim\frac{\pi}{2n}$$

En prenant la racine carrée et en utilisant que I_n est positif, on obtient que $I_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Reprenons la formule trouvée pour I_{2p} en remplaçant les factorielles avec la formule obtenue en fin de la partie I

$$I_{2p}=\frac{(2p)!}{(2^pp!)^2}\frac{\pi}{2}\sim\frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(K2^pp^pe^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2}\sim\frac{\sqrt{2p}}{Kp}\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$$

En reprenant l'équivalent trouvé à la question précédente,

$$\frac{\pi}{K\sqrt{2p}}\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}}$$

On en déduit que la constante K de la question 4.b) de la partie I vaut $\sqrt{2\pi}$.