
Mathématiques

MP - 2024/2025

Table des matières

1	Séries numériques	11
1	Généralités	12
1.1	Définitions	12
1.2	Propriétés	13
1.3	Lien suite-série	14
1.4	Divergence grossière	15
2	Séries de référence	16
2.1	Séries géométriques	16
2.2	Séries de Riemann	16
2.3	Série exponentielle	17
2.4	Exemples de calculs de sommes	18
3	Séries à termes positifs	19
3.1	Généralités	19
3.2	Théorème de comparaison par inégalités pour les séries à termes positifs	20
3.3	Rappels sur les relations de comparaison	21
3.4	Théorème de comparaison par équivalents pour les séries à termes positifs	23
3.5	Règle de d'Alembert	24
4	Séries absolument convergentes	25
4.1	Définition	25
4.2	Applications aux séries dont le terme général n'a pas nécessairement un signe constant	26
5	Comparaison séries - intégrales	28
5.1	Généralités	28
5.2	Exemples et applications	29
6	Séries alternées	30
6.1	Généralités	30
6.2	Etude du reste et de la somme	31
7	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	32
7.1	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	32
7.2	Applications classiques	34
2	Algèbre linéaire et éléments propres	37
1	Rappels	38
1.1	Définitions	38
1.2	Familles de vecteurs	38
1.3	Rang d'une application linéaire	41
2	Rappels sur les matrices	42
2.1	Changements de bases	42
2.2	Matrices semblables	43
2.3	Trace	43

3	Formes linéaires et hyperplans	44
3.1	Changement de bases	44
3.2	Bases duales et formes coordonnées	45
3.3	Formes linéaires et hyperplans	46
4	Compléments en algèbre linéaire	47
4.1	Somme	47
4.2	Parties stables	49
4.3	Calcul par blocs	51
4.4	Calculs par blocs et déterminants	52
5	Éléments propres d'un endomorphisme	54
5.1	Définition	55
5.2	Sous-espaces propres	57
6	Éléments propres d'une matrice	59
6.1	Définition	59
6.2	Endomorphismes et matrices diagonalisables	61
3	Intégration	64
1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	65
1.1	Définition	65
1.2	Propriétés	68
1.3	Théorème de comparaison pour les fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	69
1.4	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	70
1.5	Théorèmes de comparaison	71
1.6	Intégrales de référence	73
2	Intégration sur un intervalle quelconque	73
2.1	Intégrales convergentes	73
2.2	Propriétés	75
2.3	Intégrales des fonctions positives et fonctions intégrables	76
2.4	Méthodes de calculs	79
2.5	Intégration des relations de comparaisons	82
3	Les théorèmes de Lebesgue	85
3.1	Limite (simple) d'une suite de fonctions et d'une série de fonctions	85
3.2	Interversion de \lim et \int	86
3.3	Théorème de convergence dominée	87
3.4	Théorème de convergence dominée - Cas continu	89
3.5	Intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions	89
4	Polynôme caractéristique et réduction	92
1	Polynôme caractéristique	92
1.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	92
1.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	94
1.3	Multiplicités	95
1.4	Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire	96
1.5	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit	96
2	Matrices et endomorphismes trigonalisables	98
2.1	Définitions	98
2.2	Critère de trigonalisabilité	98
3	Matrices et endomorphismes nilpotents	102
3.1	Définitions	102
3.2	Critère de nilpotence	104
5	Suites et séries de fonctions	105
1	Suites de fonctions	105
1.1	Convergence simple et convergence uniforme	105
1.2	Norme infinie	108
1.3	Quelques méthodes	110

2	Continuité et double limite	112
2.1	Continuité	112
2.2	Théorème de la double limite	113
3	Intégration et dérivation	115
3.1	Intégration	115
3.2	Dérivation	118
4	Séries de fonctions	119
4.1	Convergence	120
4.2	Continuité, intégration et dérivation	122
4.3	Exemple d'étude d'une fonction définie par une série	125
6	Dénombrabilité et familles sommables	128
1	Ensembles dénombrables	128
1.1	Définitions	128
1.2	Propriétés et exemples	130
2	Familles sommables	132
2.1	L'ensemble $[0, +\infty]$	132
2.2	Familles sommables d'éléments de $[0, +\infty]$	133
2.3	Familles sommables de nombres complexes	137
2.4	Produit de Cauchy	142
7	Probabilités	144
1	Espaces probabilisés	144
1.1	Tribus	144
1.2	Probabilités	145
2	Propriétés élémentaires des probabilités	147
2.1	Continuité	147
2.2	Événements négligeables, presque sûrs	149
3	Indépendance et probabilités conditionnelles	150
3.1	Probabilités conditionnelles	150
3.2	Événements indépendants	153
4	Variables aléatoires discrètes	155
4.1	Généralités	155
4.2	Couples de variables aléatoires et vecteurs aléatoires	158
4.3	Couples et familles de variables aléatoires indépendantes	160
5	Lois usuelles	163
5.1	Loi uniforme	163
5.2	Loi de Bernoulli et loi binomiale	163
5.3	Loi géométrique	164
5.4	La loi de Poisson	165
8	Polynôme minimal et réduction	167
1	Algèbres	168
1.1	Définition	168
1.2	Sous-algèbre et morphismes d'algèbre	168
2	Polynômes d'endomorphismes et de matrices	170
2.1	Polynômes de matrices	170
2.2	Polynômes d'endomorphismes	171
3	Compléments d'algèbre	172
3.1	Idéaux d'un anneau commutatif	172
3.2	Plus grand commun diviseur	175
3.3	Algorithme d'Euclide	178
3.4	Généralisation à n polynômes	179

4	Polynômes annulateurs	180
4.1	Définitions	180
4.2	Polynôme minimal	181
4.3	Polynômes annulateurs et valeurs propres	183
4.4	Théorème de Cayley-Hamilton	184
4.5	Calcul de puissances	184
5	Critère de diagonalisabilité	186
5.1	Décomposition des noyaux	186
5.2	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	188
5.3	Endomorphismes annulés par un polynôme scindé	190
6	Compléments et applications	191
6.1	Influence du corps de base	192
6.2	Calculs de puissances	192
6.3	Commutant	192
6.4	Décomposition de Dunford	193
6.5	Racines carrées	194
6.6	Sous-espaces stables	194
9	Espaces vectoriels normés I	196
1	Normes	196
1.1	Définition	196
1.2	Exemples de normes	197
1.3	Distance associée à une norme	203
1.4	Boules	204
1.5	Parties, suites et fonctions bornées	205
1.6	Normes équivalentes	206
2	Exemple de normes équivalentes	207
2.1	Sur \mathbb{K}^n	207
2.2	Sur les espaces de fonctions	210
3	Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	210
3.1	Convergence	210
3.2	Propriétés	213
3.3	Suites extraites et valeurs d'adhérence	215
4	Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie	216
4.1	Généralités	216
4.2	Série géométrique de matrices	217
10	Séries entières	219
1	Généralités et rayon de convergence	219
1.1	Définition	219
1.2	Rayon de convergence	220
1.3	Utilisation de la règle de d'Alembert	222
1.4	Théorèmes de comparaison	224
1.5	Opérations	225
2	Étude de la somme d'une série entière	226
2.1	Convergence normale et continuité	226
2.2	Primitivation et dérivation	227
3	Fonctions développables en séries entières	230
3.1	Définitions	230
3.2	Développements en série entière des fonctions usuelles	231
4	Utilisation des séries entières dans l'étude des équations différentielles	232
4.1	Rappels du cours de première année	232
4.2	Rappels - Équations linéaires du premier ordre	233
4.3	Rappels - Équations linéaires du deuxième ordre	234
4.4	Utilisation des séries entières	236

11	Espaces préhilbertiens réels I	239
1	Rappels	239
1.1	Définition	239
1.2	Orthogonalité et projection orthogonale	241
2	Adjoint d'un endomorphisme	244
2.1	Définition	245
2.2	Propriétés	246
3	Matrices orthogonales	247
3.1	Définition	247
3.2	Groupe spécial orthogonal et orientation	249
3.3	Produit mixte	250
4	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	251
4.1	Définition	251
4.2	Propriétés	252
4.3	Isométries directes et indirectes	254
4.4	Isométries vectorielles du plan euclidien	255
4.5	Réduction des isométries vectorielles	257
4.6	Isométries vectorielles de l'espace	259
12	Espaces vectoriels normés II	262
1	Topologie d'un espace vectoriel normé	263
1.1	Ouverts	263
1.2	Voisinages	265
1.3	Fermés	266
1.4	Points intérieurs et intérieur	267
1.5	Points adhérents et adhérence	269
1.6	Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés	270
1.7	Frontière	271
1.8	Densité	271
1.9	Invariance par changement de normes équivalentes	272
1.10	Topologie induite	273
2	Limite d'une application	274
2.1	Définition	274
2.2	Propriétés	275
2.3	Composition et opérations	277
3	Applications linéaires lipschitziennes	278
3.1	Définitions	278
4	Continuité	281
4.1	Définition	281
4.2	Caractérisation du caractère continu par les images réciproques	284
4.3	Applications uniformément continues	285
4.4	Applications lipschitziennes	285
4.5	Applications linéaires continues	287
13	Probabilités II	289
1	Espérance d'une variable aléatoire discrète	289
1.1	Cas des variables positives	289
1.2	Cas des variables réelles ou complexes	293
1.3	Propriétés de l'espérance	293
2	Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle	296
2.1	Variables aléatoires réelle de carré sommable	296
2.2	Lois usuelles	299
2.3	Covariance	300
3	Inégalités probabilistes et loi des grands nombres	302
3.1	Inégalités	302
3.2	Loi faible des grands nombres	304

4	Fonctions génératrices	305
4.1	Généralités	305
4.2	Exemples	307
14	Espaces vectoriels normés III	309
1	Parties compactes d'un espace vectoriel normé	309
1.1	Définition	309
1.2	Applications continues sur une partie compacte	311
2	Espaces vectoriels de dimension finie	313
2.1	Equivalence des normes	313
2.2	Topologie des espaces vectoriels de dimension finie	314
2.3	Applications continues	315
3	Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie	316
3.1	Rappels	316
3.2	Série exponentielle de matrices	316
4	Parties connexes par arcs	318
4.1	Motivation	318
4.2	Définition	318
4.3	Image d'une partie connexe par arcs par une application continue	320
15	Espaces préhilbertiens réels 2	321
1	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	321
1.1	Définition	321
1.2	Matrice d'un endomorphisme autoadjoint	322
1.3	Théorème spectral	323
2	Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	325
2.1	Définitions	325
2.2	Caractérisation spectrale	326
16	Fonctions à valeurs vectorielles	328
1	Dérivabilité	328
1.1	Dérivabilité en un point	328
1.2	Opérations	330
1.3	Dérivées successives	333
2	Intégration sur un segment	333
2.1	Définitions	333
2.2	Propriétés de l'intégrale	335
3	Intégrale fonction de sa borne supérieure	336
3.1	Théorème fondamental de l'analyse	336
3.2	Inégalités des accroissements finis	337
4	Formules de Taylor	338
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	338
4.2	Formule de Taylor-Young	338
5	Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles	339
5.1	Généralités	339
5.2	Continuité et théorème de la double limite	341
5.3	Intégration et dérivation	343
17	Calcul différentiel	345
1	Différentielle et dérivées partielles	345
1.1	Dérivées selon un vecteur	345
1.2	Différentielle	347
1.3	Expression dans une base	351
1.4	Matrice jacobienne	352

1.5	Gradient	353
1.6	Applications de classe \mathcal{C}^1	354
2	Opérations sur les applications différentiables et les applications de classe \mathcal{C}^1	356
2.1	Combinaison linéaire et fonctions multilinéaires	356
2.2	Composition et règle de la chaîne	358
3	Dérivée le long d'un arc	362
3.1	Définition	362
3.2	Théorème fondamental de l'analyse	363
3.3	Vecteurs tangents à une partie	364
18	Équations différentielles linéaires	368
1	Généralités	368
1.1	Définitions	368
1.2	Structure des solutions	370
1.3	Problème de Cauchy	370
1.4	Équation différentielle scalaire d'ordre n	371
2	Théorème de Cauchy linéaire	373
2.1	Théorème de Cauchy linéaire	373
2.2	Applications du théorème de Cauchy linéaire	374
2.3	Exemples d'équations différentielles non normalisées	376
3	Équations différentielles à coefficients constants	377
3.1	Exponentielle des matrices et endomorphismes	377
3.2	Généralités	378
3.3	Exemples de calculs	380
4	Equations différentielles scalaires du second ordre	382
4.1	Wronskien d'un couple de solution	382
4.2	Variation de la constante	384
4.3	Résolutions d'une équation scalaire du second ordre en connaissant une solution	385
19	Intégrales à paramètres	387
1	Théorèmes généraux	387
1.1	Limite et continuité	387
1.2	Dérivabilité	390
2	Exemples	393
20	Calcul différentiel II	394
1	Fonctions de classe \mathcal{C}^k	394
1.1	Définitions	394
1.2	Opérations algébriques sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	396
2	Exemple d'équations aux dérivées partielles	398
2.1	Premier ordre	398
2.2	Second ordre	399
3	Optimisation	400
3.1	Point critique et extremum	400
3.2	Matrice hessienne	401
3.3	Optimisation sous contrainte	404
21	Algèbre générale	406
1	Groupes	406
1.1	Généralités	406
1.2	Sous-groupe	407
1.3	Morphismes de groupes	410

2	Groupes monogènes	412
2.1	Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	412
2.2	Générateurs, groupes monogènes et groupes cycliques	415
3	Ordre d'un élément	417
3.1	Définition	417
3.2	Théorème de Lagrange	418
4	Anneaux	421
4.1	Définitions	421
4.2	Morphisme d'anneaux	423
4.3	Anneaux intègres et corps	424
5	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	425
5.1	Définition	425
5.2	Théorème Chinois	429
5.3	Indicatrice d'Euler	432
6	Factorisation des polynômes de $\mathbb{K}[X]$	434
6.1	Polynômes irréductibles	434
6.2	Décomposition en produit de facteurs irréductibles	435