On désigne par F l'ensemble des fonctions réelles f définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que $x \mapsto e^{-x}(f(x))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles définies sur $[0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace formé par les fonctions ponynômiales de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout naturel n, on note φ_n et L_n les fonctions de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

Première partie

1) Soit $(f,g) \in F^2$. Montrer que $x \mapsto e^{-x} f(x) g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2) a) Etablir que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   b) Montrer que
   $$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx \text{ est un produit scalaire sur } F$$
   Dans la suite, on note $||.||$ la norme euclidienne associée.
3) a) Montrer que E est inclus dans F.
   b) Calculer pour tout naturel n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{+\infty} \varphi_n(x) dx$.

Dorénavant, on identifiera chaque polynôme avec la restriction de sa fonction polynômiale à $\mathbb{R}^+$.

4) a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la règle de Leibniz, déterminer L_n et montrer que c'est un élément de E : on précisera le degré de L_n et le coefficient $a_{n,k}$ de x^k dans l'expression de L_n.
   On vérifiera que
   $$a_{n,n} = (-1)^n, \quad a_{n,n-1} = (-1)^{n-1} n^2 \quad \text{et} \quad a_{n,0} = n!$$
   (et on vérifiera la cohérence avec les calculs de a) !)
5) a) Montrer que pour tout $k < n$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$.
   b) Donner un équivalent de $\varphi_n^{(k)}(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (n et k fixés).
   c) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$.
   En écrivant $(L_m|L_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx$, montrer que $(L_m|L_n) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m'(x) \varphi_n^{(n-1)}(x) dx$.
   Itérer le procédé (en justifiant) et en déduire la valeur de $(L_m|L_n)$.
   d) Par le même procédé (on ne demande plus de justifier), exprimer $(L_n|L_n)$ en fonction de I_n (calculé en I-3)b)) puis de n.
6) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et P_n définie par : $\quad P_n = L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1}$.

a) Montrer que $P_n \in E_n$.

Ainsi, P_n se décompose sur la base orthonormale $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, \frac{L_k}{k!}$; rappeler la valeur des α_k en fonction du produit scalaire.

Le but des questions suivantes est de déterminer les α_k.

b) Montrer que pour tout $Q \in E_n$, $(L_{n+1}|Q) = 0$.

c) Justifier que pour tout couple (R, Q) d'éléments de E^2, on a : $(X \, . \, Q|R) = (Q|X \, . \, R)$. En déduire que $(X \, L_{n+1}|L_k) = 0$ pour $k \leqslant n - 1$.

d) En déduire que $\forall n \geqslant 1, \quad \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad (P_n|L_k) = 0$ et donc les valeurs de $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$.

e) Il reste donc à calculer α_n : montrer que $L_{n+1} + X \, L_n$ appartient à E_n ; en déduire, en utilisant judicieusement certaines des questions précédentes, la valeur de α_n.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_{n+2} + (X - 2n - 3)L_{n+1} + (n+1)^2 L_n = 0$$

8) Dans cette question, n désigne un élément fixé de $\mathbb{N}$.

a) Etablir : $L_{n+1} = XL'_n + (n + 1 - X)L_n$ (On pourra remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x)$ et utiliser la règle de Leibniz).

b) En utilisant la relation du I-7)e) et ce qui précède, montrer que L_n est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(\epsilon_n) \quad x \, z''(x) + (1 - x)z'(x) + n \, z(x) = 0$$

9) Cette question a pour objet de montrer que les zéros de L_n sont réels et strictement positifs lorsque $n \geqslant 1$.

Soit $n \geqslant 1$, on désigne par Z_n l'ensemble des zéros réels de L_n, appartenant à $]0, +\infty[$ et d'ordre de multiplicité impair.

a) Ecrire la décomposition de L_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. On isolera les facteurs correspondant aux éléments de Z_n.

Montrer que si Z_n est vide alors L_n est de signe constant au sens large sur $[0, +\infty[$.

En considérant $(L_0|L_n)$, montrer que Z_n est non vide.

b) Soit donc $Z_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$ et $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$.

On pose $S_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - u_k)$. En considérant $(S_n|L_n)$, montrer que l'hypothèse $m < n$ conduit à une contradiction, et en déduire que $m = n$.

c) Déduire de ce qui précède que les zéros de L_n sont tous réels, simples et appartiennent à $]0, +\infty[$.

Deuxième partie

Pour tout réel a, on définit f_a par : $\forall x \in [0, +\infty[, \ f_a(x) = e^{-ax}$.

1) Déterminer la partie D de $\mathbb{R}$ telle que $a \in D \iff f_a \in F$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in D$.

a) i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(L_k|f_a) = a^k \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-(a+1)x} dx$ (on refera une suite d'intégrations par parties comme dans la question I-5)c), qu'on justifiera très succintement).

ii) En utilisant I-3)b) et un changement de variable, en déduire que

$$(L_k|f_a) = k! \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

b) En déduire l'expression du projeté orthogonal de f_a sur E_n, noté $S_{n,a}$, en fonction des L_k (on rappelle que, d'après I 6) , la famille $\left(\dfrac{L_k}{k!}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n).

c) Calculer $\|f_a\|^2$.

d) Calculer $\|S_{n,a}\|^2$; déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S_{n,a}\|^2$.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_a||^2 = ||S_{n,a}||^2 + ||f_a - S_{n,a}||^2$.
En déduire que la suite $(S_{n,a})$ converge vers f_a dans F muni de la norme euclidienne $||.||$ associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

3) Soit $\lambda \in [0,+\infty[$ fixé. On considère la série entière $\boxed{\text{selon les puissances de } t}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{L_n(\lambda)}{n!} t^n$.

On note R_λ son rayon de convergence et G_λ sa somme.

a) Montrer que $t \longmapsto G_\lambda(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\lambda)}{n!} t^n$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_\lambda)\ :\ (1-t)^2\, y'(t) - (1-t-\lambda) y(t) = 0 \text{ sur }]-R_\lambda, R_\lambda[$$

(inutile ici d'utiliser les coefficients $a_{n,k}$, il suffit d'utiliser la relation du I-7)e)).

b) Résoudre $(\mathcal{E}_\lambda)$ sur $]-\infty,1[$ et en déduire l'expression de $t \longmapsto G_\lambda(t)$ sur $]-R_\lambda, R_\lambda[\cap]-\infty,1[$.

4) Une première minoration de R_λ

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|L_n(\lambda)| \leqslant n!(1+\lambda)^n$

b) En déduire un minorant strictement positif de R_λ.

5) Une meilleure minoration de R_λ.
Soit $f\ :]-1,1[\to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des coefficients de sa série de Taylor. Soit $t \in]-1,1[$. On a donc $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$.

a) Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(f(t))^p = \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{N}^p} b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}$$

(on justifiera notamment que le membre de droite est bien la somme d'une famille sommable)

b) Montrer que la famille $\left(\frac{b_{n_1}\dots b_{n_p} t^{n_1+\dots+n_p}}{p!}\right)_{p\in\mathbb{N},\ (n_1,\dots,n_p)\in N^p}$ est sommable

c) En déduire que $\exp\circ f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

d) Montrer que $R_\lambda \geqslant 1$

6) Soit $a \in D$; en utilisant ce qui précède, démontrer que la suite de fonctions $(S_{n,a})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers f_a.