

Exercice I

A - Lois zêta

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) \geq 0$ (car $\zeta(x) > 1 > 0$)
De plus, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \zeta(x) = 1$$

On en déduit la formule donnée définie bien une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* .

2. On calcule dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$$

La variable aléatoire X a une espérance finie quand cette série converge (par définition). Or cette série est convergente si et seulement si $x - 1 > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $x > 2$.

Dans ce cas, $E(X) = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$

3. Soit $k \geq 1$. On calcule dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. D'après le théorème de transfert

$$E(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}}$$

La variable aléatoire X admet un moment d'ordre k quand cette série converge (par définition). Or cette série est convergente si et seulement si $x - k > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $x > k + 1$.

Dans ce cas, $E(X) = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}$

4. On sait que X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance finie, donc si et seulement si $x > 3$ et, dans ce cas, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\zeta(x-2)\zeta(x) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

5. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X \in a\mathbb{N}^*) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ka)\right) \quad (\text{par définition de } a\mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \zeta(x) = \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

B - Mutuelle indépendance

6. Par définition, pour montrer que la famille $((X = p_i \mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, il faut montrer que pour toute sous famille (i_1, \dots, i_r) d'éléments distincts de \mathbb{N}^* , $P(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^r P(X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)$

On considère donc (i_1, \dots, i_r) des éléments distincts de \mathbb{N}^* . On sait que pour $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \omega \in (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) \\ &\iff \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \omega \in p_{i_k} | X(\omega) \\ &\iff \left(\prod_{i=1}^r p_{i_k} \right) | X(\omega) \quad (\text{car les } p_i \text{ sont premiers entre eux}) \\ &\iff \omega \in (X \in a \mathbb{N}^*) \quad (\text{où } a = \prod_{k=1}^r p_{i_k}) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)\right) = P(X \in a \mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x} = \left(\prod_{k=1}^r p_{i_k}\right)^{-x} = \prod_{k=1}^r p_{i_k}^{-x} = \prod_{i=1}^r P(X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)$$

On a bien montré que

la famille $((X = p_i \mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants

7. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante car pour tout entier $n \geq 1$:

$$B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) = (X \notin p_{n+1} \mathbb{N}^*) \cap B_n \subset B_n$$

Par continuité décroissante, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right).$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \omega \in (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \nmid X(\omega) \\ &\iff \forall p \in \mathcal{P}, p \nmid X(\omega) \\ &\iff X(\omega) = 1 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right) = P(X = 1).$$

Par suite, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(x)} &= P(X = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n P(X \notin p_k \mathbb{N}^*) \quad (\text{indépendance admise après la question 6}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - P(X \in p_k \mathbb{N}^*)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) \quad (\text{d'après la question 5}). \end{aligned}$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

8. On a

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{(X \in p\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p\mathbb{N}^*)} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} ((X \notin p\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p\mathbb{N}^*)) \\ &= \bigcap_{i=1}^{+\infty} ((X \notin p_i \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_i \mathbb{N}^*)) \quad (\text{car } \mathcal{P} = \{p_i, i \in \mathbb{N}^*\}) \\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=1}^n ((X \notin p_i \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_i \mathbb{N}^*)) \right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n. \end{aligned}$$

donc, d'après la propriété de la continuité décroissante, comme C_n forme une suite décroissante d'événements, on a :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n ((X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*))\right).$$

Or, on peut démontrer comme à la question 6 que les événements $((X \in p_k \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k \mathbb{N}^*))_{k \in 1..n}$ sont mutuellement indépendants (le résultat final sera au carré), donc leurs complémentaires, $((X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*))_{k \in 1..n}$ sont aussi indépendants, donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n ((X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*))\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n P((X \notin p_k \mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k \mathbb{N}^*)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - P((X \in p_k \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k \mathbb{N}^*))) \quad (\text{en passant au complémentaire}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - P(X \in p_k \mathbb{N}^*)P(Y \in p_k \mathbb{N}^*)) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \frac{1}{p_k^x}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)} \quad (\text{d'après la question 7 avec } 2x > 1) \end{aligned}$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

9. Par définition du PGCD, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$W_n(\omega) \in k\mathbb{N}^* \iff k \mid U_n(\omega) \wedge V_n(\omega) \iff (k \mid U_n(\omega) \text{ et } k \mid V_n(\omega))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= P((U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*)) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)P(V_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes}) \\ &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (\text{même loi}). \end{aligned}$$

Or, les entiers j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leq ki \leq n \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n/k \Leftrightarrow 1 \leq i \leq \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).

On a donc $\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \mid j\} = \{ki, i \in \llbracket 1, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket\}$.

Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, on obtient :

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\text{card}\{ki, i \in \llbracket 1, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket\}}{\text{card}\llbracket 1, n \rrbracket} \right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2.$$

10. Soit $m \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^m P(W_n = k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(W_n = k) = 1$$

En passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$ on en déduit que

$$\sum_{k=1}^m \ell_k \leq 1$$

Montrons maintenant que les séries $\sum_{k \geq 1} P(W_n = k)$ convergent uniformément (par rapport à n)

vers 1. Pour cela on remarque que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \geq 1$,

$$P(W_n = k) \leq P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2 \leq \left(\frac{n/k}{n} \right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

De ce fait, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq 1$,

$$1 - \sum_{k=1}^m P(W_n = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n = k) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ étant convergente, il existe $M \geq 1$ tel que pour $m \geq M$, $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$. Pour un tel

m , on a donc que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^m P(W_n = k) \geq 1 - \varepsilon$.

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir que

$$\sum_{k=1}^m \ell_k \geq 1 - \varepsilon$$

Remarque : La preuve ci-dessus est une version du théorème de double limite. Si on pose pour tout entier $k \geq 1$, $f_k : n \mapsto P(W_n = k)$.

— La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge simplement vers $S : n \mapsto 1$ car pour tout entier n ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(W_n = k) = 1.$$

— Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \ell_k$.

— Il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur \mathbb{N}^* vers S puisqu'il y a convergence normale car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_k(n)| \leq P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k^2}$$

Le théorème de double limite affirme alors que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0, 1]$, donc $\ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0, 1]$.

De plus, la question 10 implique que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \ell_k = 1$. C'est-à-dire que la série $\sum_{k \geq 1} \ell_k$ converge et la somme vaut 1.

On a donc $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur \mathbb{N}^*

12. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$n/k - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq n/k, \text{ donc } \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leq \frac{1}{k}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \frac{1}{k}$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (\text{propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} \\ &= P(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 5)} \end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, W suit une loi zêta de paramètre 2

$$\text{On a alors } \ell_1 = P(W = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(2)1^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Or,

$$P(W = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(W_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers

$$\frac{1}{\zeta(2)} \stackrel{\text{culture}}{=} \frac{1}{\pi^2/6} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice II

Partie I - Résultant de deux polynômes :

1. a) Soit p, q deux entiers naturels. Soit P, Q des polynômes de degré au plus p et au plus q .
L'application $u_{p,q,P,Q}$ est une application linéaire car $\forall (A_1, B_1) \in E \quad \forall (A_2, B_2) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} u_{p,q,P,Q}(\lambda(A_1, B_1) + (A_2, B_2)) &= u_{p,q,P,Q}(\lambda A_1 + A_2, \lambda B_1 + B_2) \\ &= P(\lambda A_1 + A_2) + Q(\lambda B_1 + B_2) \\ &= \lambda(PA_1 + QB_1) + (PA_2 + QB_2) \\ &= \lambda u_{p,q,P,Q}(A_1, B_1) + u_{p,q,P,Q}(A_2, B_2) \end{aligned}$$

- b) Pour $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, $u_{p,q,P,Q}((X^k, 0)) = X^k P$. Cela implique que la $(k+1)$ -ème colonne de la

matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u_{p,q,P,Q})$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où a_0 figure à la $(k+1)$ -ème ligne.

De même, Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $u_{p,q,P,Q}(0, X^k) = QX^k$. Cela implique que la $(q+j+1)$ -ème

colonne de la matrice M est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \\ \vdots \\ b_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où b_0 figure à la $(j+1)$ -ème ligne.

La matrice M est donc la matrice $M_{p,q,P,Q}$

2. a) — $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $u_{p,q,P,Q}$ est bijective
Alors elle est surjective. Comme $1_{\mathbb{C}[X]}$ appartient à F ,

$$\exists (A, B) \in E \quad 1_{\mathbb{C}[X]} = u_{p,q,P,Q}(A, B) = PA + QB$$

Par le théorème de Bézout, P et Q sont premiers entre eux

- $\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons P et Q premiers entre eux. Soit $(A, B) \in \text{Ker}(u_{p,q,P,Q})$. On a $PA + QB = 0$ ce qui implique $P(-A) = QB$ donc P divise QB .

Comme P et Q sont premiers entre eux P divise B par le théorème de Gauss. En remarquant que $d^\circ(B) < p = d^\circ(P)$ on obtient que $B = 0$. De même, $A = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(u) \subset \{0_E\}$ donc $u_{p,q,P,Q}$ est injective. Comme $\dim(E) = q + p = \dim(F)$,

$u_{p,q,P,Q}$ est bijective

- b) En utilisant ce qui précède

$$\text{Res}(P, Q) \neq 0 \iff \det(M_{p,q,P,Q}) \neq 0 \iff \det(u_{p,q,P,Q}) \neq 0 \iff u_{p,q,P,Q} \text{ est bijective}$$

On a donc par la question 2.a) :

$$\text{Res}(P, Q) \neq 0 \iff P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux}$$

3. a) Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans \mathbb{C} si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = P'(z) = 0$.

Or deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement ils n'ont aucune racine **complexe** commune (deux polynômes sont premiers entre eux ssi ils n'ont aucun diviseur irréductible commun, et les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1 par le théorème de d'Alembert-Gauss).

Ainsi un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ a donc une racine multiple si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux, ce qui équivaut (en supposant P de degré au moins deux pour respecter l'énoncé) que $\text{Res}(P, P') = 0$.

- b) *Application* Le polynôme $P = X^3 + aX + b$ admet une racine multiple si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Res}(P, P') \\ &= \begin{vmatrix} b & a & & & \\ a & b & 0 & a & \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & & 3 & 0 \\ 0 & 1 & & & 3 \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} b & a \\ a & b & 0 & a \\ 1 & 0 & & 3 \\ 0 & 1 & & \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} b & a \\ a & b & 0 & a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 1 & 0 & & 3 \end{vmatrix} \text{ par développement selon la dernière colonne} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3a \begin{vmatrix} b & a \\ a & b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3a \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & a & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} b & a \\ a & b & 0 \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} \text{ par la même technique} \\ &= a^3 - 3a^3 - 3a^3 + 9(3b^2 + a^3) \\ &= \boxed{4a^3 + 27b^2} \end{aligned}$$

- c) On considère $f : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \det(M_{n,n-1,P,P'})$. En particulier $f(P) = \text{Res}(P, P')$ si P est de degré n . On remarque que $\Delta_n = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ puisque

- si P est de degré n , P a n racines distinctes ssi $\text{Res}(P, P') \neq 0$
- si P est de degré strictement inférieur à n alors P n'a pas n racines distinctes, et $f(P)$ est nul car $M_{n,n-1,P,P'}$ n'est pas inversible car l'application $u_{n,n-1,P,P'}$ associée n'est pas surjective car son image est incluse dans $\mathbb{C}_{2n-3}[X]$ donc n'est pas égale à $\mathbb{C}_{n+n-1-1}[X]$.

Or \mathbb{C}^* est ouvert (car son complémentaire $\{0\}$ est fermé) et f est continue car :

$P \mapsto P'$ est continue car linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension finie

$(P, Q) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \mapsto \det(M_{n,n-1,P,Q})$ est continue car polynomiale en les coefficients de ses arguments.

Donc Δ_n est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$

Partie II - Matrices diagonalisables :

4. On veut montrer que $E_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour cela, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, exhibons une suite $(A_p) \in E_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telle que $(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T . On pose alors pour tout $p \geq 1$,

$$T_p = T + \text{diag} \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p} \right)$$

où $\text{diag} \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p} \right)$ est la matrice diagonale ayant $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p}$ comme coefficients diagonaux. Il est clair que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \text{diag} \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p} \right) = 0$$

et donc $(T_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} T$.

De plus, les coefficients diagonaux de T_p sont deux à deux distincts dès que $\frac{n}{p}$ est strictement inférieur au minimum des modules des différences entre deux coefficients distincts de la diagonale de T . En effet, pour i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$:

— Si $\lambda_i = \lambda_j$, $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$.

— Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $|\frac{i}{p} - \frac{j}{p}| \leq \frac{n}{p} < |\lambda_i - \lambda_j|$ ce qui implique que $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$.

On en déduit que $T_p \in E_n(\mathbb{C})$ à partir d'un certain rang N .

Il suffit alors de poser pour $p \geq 0$, $A_p = PT_{N+p+1}P^{-1}$. En effet,

— Comme $(T_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} T$, par continuité du produit matriciel, $(T_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} PTP^{-1} = A$

— Pour $p \geq 0$, $T_{N+p+1} \in E_n(\mathbb{C})$ et donc A_p qui lui est semblable aussi.

Ainsi $E_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

De plus $E_n(\mathbb{C}) \subset D_n(\mathbb{C})$ car toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

La suite (A_p) construite ci-dessus est aussi une suite de matrices de $D_n(\mathbb{C})$.

Donc $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

5. L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_M \in \mathbb{C}_n[X]$ est continue car $\chi_M = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} X - M[\sigma(j), j])$ est polynomiale en X et en les coefficients $M[i, j]$ de son argument M , donc les coefficients de χ_M (ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$) sont polynomiaux en les coefficients de M .
6. Par définition, $E_n(\mathbb{C}) = g^{-1}(\Delta_n)$ où $g : M \mapsto \chi_M$.

Comme Δ_n est ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$ d'après 3.c) et que g est continue, $E_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$7. \text{ a) } \text{Considérons } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon/2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = A + \frac{\varepsilon}{2} E_{12}.$$

Elle vérifie que $\|B - A\|_\infty < \varepsilon$. On note alors p le plus grand entier tel que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$. On voit alors que B n'est pas diagonalisable car le sous-espace propre associé à λ_1 n'est pas de dimension p car notant (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, ce sous-espace est inclus dans $\text{Vect}(E_1, \dots, E_p)$ mais ne contient pas E_2 .

- b) Comme $E_n(\mathbb{C})$ est un ouvert inclus dans $D_n(\mathbb{C})$, il est inclus dans l'intérieur $D_n(\mathbb{C})$. Soit A un point intérieur à $D_n(\mathbb{C})$.

Il existe $\delta > 0$ tel que $B(A, \delta) \subset D_n(\mathbb{C})$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $A \notin E_n(\mathbb{C})$. Ainsi A est diagonalisable mais a une valeur propre au moins double.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_{n-p} \end{pmatrix}$ avec $\mu_1, \dots, \mu_{n-p} \in \mathbb{C}$ distincts de

$\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Posons $\varepsilon = \frac{\delta}{n^2 \|P\| \|P^{-1}\|}$ (où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$)

Soit B comme dans la question précédente.

Posons $A' = PBP^{-1}$. La matrice A' n'est diagonalisable puisque B ne l'est pas.

Or $\|A' - A\| < \delta$, ce qui est une contradiction.

Ainsi l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $E_n(\mathbb{C})$

Partie III - Classes de similitude :

8. a) La matrice $P_\lambda^{-1}TP_\lambda$ se déduit de $T = (t_{i,j})$ en divisant (respectivement : multipliant) la 1ère ligne (resp : colonne) par λ , la seconde par λ^2 , etc...

$$\text{Ainsi } P_\lambda^{-1}TP_\lambda = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \lambda t_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \lambda^{n-1}t_{1,n} \\ & t_{2,2} & \lambda t_{2,3} & & & \lambda^{n-2}t_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & t_{n-1,n-1} & \lambda t_{n-1,n} \\ & & & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

- b) Supposons A nilpotente. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure stricte telles que $A = QTQ^{-1}$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = QP_{1/k}^{-1}TP_{1/k}Q^{-1}$.

Par continuité du produit matriciel, (A_k) converge vers $Q0Q^{-1} = 0$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in C_A$.

Donc la matrice nulle appartient à l'adhérence de C_A

9. Supposons que $0 \in \overline{C_A}$

Alors il existe une suite (M_k) de matrices de C_A convergeant vers 0.

Par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$, la suite (χ_{M_k}) converge vers $\chi_0 = X^n$.

Or la suite (χ_{M_k}) est constante de valeur χ_A donc converge vers χ_A .

Par unicité de la limite, $\chi_A = X^n$ donc A est nilpotente

10. On suppose C_A est fermée.

On peut écrire $A = QTQ^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.

Dans les notations de la question 8), la suite (A_k) converge vers QDQ^{-1} où D est la matrice diagonale ayant les mêmes coefficients diagonaux que T .

Comme C_A est fermée, A est semblable à QDQ^{-1} donc à D .

Donc A est diagonalisable.

11. On suppose que A est diagonalisable. On considère $B \in \overline{C_A}$ et note $(M_p)_{p \geq 0} \in C_A^{\mathbb{N}}$ telle que $(M_p) \rightarrow B$. On note π_A le polynôme minimal de A .

a) Pour tout $p \geq 0$, M_p et A sont semblables donc ont même polynôme minimal, donc

$$\pi_A(M_p) = \pi_{M_p}(M_p) = 0$$

Notant $\pi_A = X^K + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \dots + \alpha_0$, l'application $M \mapsto \pi_A(M) = M^k + \alpha_{k-1}M^{k-1} + \dots + \alpha_0I_n$ est continue par continuité du produit matriciel

Donc $(\pi_A(M_p))$ converge vers $\pi_A(B)$.

Par unicité de la limite, $\pi_A(B) = 0$.

Or π_A est scindé à racines simples donc B est diagonalisable

b) Pour tout $p \geq 0$, M_p et A sont semblables donc ont même polynôme caractéristique, donc $\chi_{M_p} = \chi_A$.

Par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$, on a donc $\chi_B = \chi_A$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées selon leur multiplicité.

Comme A et B sont diagonalisables, elles sont toutes deux semblables à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Donc B est semblable à A

Donc $B \in C_A$.

Ainsi C_A contient tous ses points intérieurs, donc est fermée