Exercice I

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on définit :
$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)} \end{array}.$$

On pose aussi f_0 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_0 : x \mapsto \dfrac{(-1)^0}{0!(x+0)} = \dfrac{1}{x}$.

Finalement, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $S(1)$.
3. a) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
   b) Déterminer un équivalent simple de S en $+\infty$. On pourra étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x)$
4. Déterminer un équivalent simple de S en 0^+.
5. a) Montrer que : $\forall x > 0$, $xS(x) = S(x+1) + \dfrac{1}{e}$
   b) Retrouver avec la question précédente les équivalents de S en 0^+ et en $+\infty$.
   c) Chercher un développement asymptotique de $S(x)$ en $+\infty$ selon les puissance de $\dfrac{1}{x}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
6. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice II

L'objectif de cette exercice est d'étudier et de calculer la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\, d\theta$$

Remarque préliminaire : en présence d'autant de variables : n, x et θ, on prêtera une attention particulière à désigner sans ambiguïté
- la variable d'intégration lorsqu'on intègre
- la variable par rapport à laquelle on dérive lorsqu'on dérive
- la variable de chacun des termes d'une suite ou série de fonctions lorsqu'on parle de convergence uniforme ou normale

1. **Dans cette question, x est un réel fixé de $]-1,1[$.**

   Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n de variable θ définie sur $[0,\pi]$ par :
   $$f_n(\theta) = \frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$$
   a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$. Elle y converge donc simplement, on appellera $f : \theta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta)$ la fonction somme.
   b) Montrer que f est de classe c^1 sur $[0,\pi]$, et exprimer $f'(\theta)$ à l'aide de la somme d'une série.
   c) Montrer que la série de terme général $u_n(\theta) = x^n e^{in\theta}$ $(n \geqslant 1)$ converge pour tout θ dans $[0,\pi]$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\theta)$, puis la partie imaginaire de cette somme (soyez soigneux, le résultat sert évidemment pour les questions suivantes).

d) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $f'(\theta)$ pour θ dans $[0, \pi]$.

e) Déduire de la question précédente que : $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

(on admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x + x^2)$ pour tout x dans $]-1, 1[$)

f) Calculer $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\, d\theta$ à l'aide de ce qui précède.

2. On souhaite, pour finir, montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \forall \theta \in]0, \pi[, \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}$.

Cette égalité a été démontrée pour x tel que $|x| < 1$ ci-dessus, on se propose de l'étendre ici à $x = 1$ et $x = -1$.

$\boxed{\text{Soit } \theta \text{ fixé dans }]0, \pi[}$.

a) Etudier les variations sur $[0, 1]$ de $x \longmapsto g(x) = |1 - xe^{i\theta}|^2 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1$ (faire deux tableaux de variations, selon le signe de $\cos(\theta)$).
En déduire que : $\forall x \in [0, 1]$, $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|1 - xe^{i\theta}| \geqslant \sin(\theta)$.

$$\forall x \in [0, 1],\ \forall \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ |1 - xe^{i\theta}| \geqslant 1.$$

b) On pose, pour $\theta \in]0, \pi[$, $I_n(\theta) = \int_0^1 \frac{x^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx$. Montrer, en la majorant convenablement en module à l'aide de ce qui précède, que $(I_n(\theta))$ converge vers 0 pour $\theta \in]0, \pi[$.

c) Soit $V_n(\theta) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} e^{ik\theta} \right) dx$, pour $\theta \in]0, \pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $V_n(\theta)$ en fonction de $I_n(\theta)$ et $I(\theta) = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\, dx$.

En déduire que $(V_n(\theta))$ converge vers $I(\theta)$.

d) θ étant toujours dans $]0, \pi[$, en déduire finalement que la série $\sum \left(\frac{\cos(k\theta)}{k} \right)_{k \geqslant 1}$ est convergente, de somme $Re(I(\theta))$. Calculer $Re(I(\theta)) = \int_0^1 Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} \right) dx$, conclure sur l'objectif de cette question 2) pour $x = 1$, i.e. :

$$\forall \theta \in]0, \pi[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2(1 - \cos\theta))$$

En déduire le cas $x = -1$.

Exercice III

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_n = +1) = p \text{ et } P(X_n = -1) = q$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N} \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$ (et donc $S_0 = 0$)
On pose pour tous $a, c \in \mathbb{N}$ tels que $a \leqslant c$ et $(a,c) \neq (0,0)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{a,c,n} = (0 < a + S_1 < c) \cap \cdots \cap (0 < a + S_{n-1} < c) \cap (a + S_n = c)$$

avec la convention $A_{a,c,0} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < c \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases}$, et :

$$s_{a,c} = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{a,c,n}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{a,c,n})$$

1. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, les deux variables aléatoires
   S_1 et $(S_2 - S_1, \ldots, S_n - S_1) : \omega \mapsto (S_2(\omega) - S_1(\omega), \ldots, S_n(\omega) - S_1(\omega))$
   sont indépendantes.

   b) Soit $n \geqslant 1$

   i) Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \in \mathbb{Z}$.
   Exprimer l'événement $(S_2 - S_1 = \sigma_1, S_3 - S_1 = \sigma_2, \ldots, S_n - S_1 = \sigma_{n-1})$ sous la forme $(X_2 = \cdots, \ldots, X_n = \cdots)$.

   ii) En déduire que
   $(S_2 - S_1, S_3 - S_1, \ldots, S_n - S_1)$ suit la même loi que $(S_1, \ldots, S_{n-1})$.

   c) Déduire des questions précédentes que si $1 \leqslant a \leqslant c-1$,

$$s_{a,c} = p\, s_{a+1,c} + q\, s_{a-1,c}$$

2. On pose $\rho = \frac{q}{p}$. Montrer que pour a, c entiers non tous nuls tels que $0 \leqslant a \leqslant c$.

$$s_{a,c} = \begin{cases} \frac{\rho^a - 1}{\rho^c - 1} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{a}{c} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

3. On pose pour a, c entiers non tous nuls tels que $0 \leqslant a \leqslant c$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{a,c,n} = (0 < a + S_1 < c,\ \ldots,\ 0 < a + S_{n-1} < c,\ a + S_n = 0)$$

   avec la convention $B_{a,c,0} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a > 0 \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases}$, et :

$$r_{a,c} = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a,c,n}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_{a,c,n})$$

   a) Posons $S'_n = -S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tous a, c entiers non tous nuls tels que $0 \leqslant a \leqslant c$ déterminer un entier a' tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{a,c,n} = (0 < a' + S'_1 < c,\ \ldots,\ 0 < a' + S'_{n-1} < c,\ a' + S'_n = c)$$

   b) En déduire, à l'aide du résultat de la question 2), une expression de $r_c(a)$. (On isolera là encore le cas $\rho = 1$)

   c) En déduire que $s_{a,c} + r_{a,c} = 1$.

   d) Quelle est la probabilité de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0 < a + S_n < c)$? (pour a, c entiers non tous nuls tels que $0 \leqslant a \leqslant c$)