Exercice I

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on veut montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right)$ converge. On remarque que pour $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right| = \frac{1}{n!(x+n)} \leqslant \frac{1}{n!}$$

Or la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}\right)$ converge (série exponentielle) donc, par comparaison de séries positives, la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!(x+n)}\right)$ converge. La série $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right)$ est donc absolument convergente donc convergente. Il ne reste plus qu'à rajouter f_0 pour obtenir que $\boxed{\text{la fonction } S \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

On veut maintenant appliquer le théorème afférent à la continuité d'une série de fonctions.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues.

— Pour $n \geqslant 1$, $|f_n| : x \mapsto \frac{1}{n!(x+n)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f_n||_\infty = |f_n(0)| = \frac{1}{nn!} \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Comme précédemment, la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} ||f_n||_\infty\right)$ converge. Donc la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 1} f_n\right)$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $x \mapsto \left(\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc, en ajoutant f_0 (qui est aussi continue) que $\boxed{S \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$.

2. On a

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \boxed{1 - e^{-1}}.$$

3. a) On va utiliser le théorème de la double limite.

— Pour tout entier n, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$.

— La série de fonctions converge uniformément sur $]0, +\infty[$ (question 1.)

D'après le théorème de la double limite on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0}$.

b) Considérons pour $x > 0$, $xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} xf_n(x)$. On va utiliser le théorème de la double limite.

— Pour tout entier n, $\lim_{x\to+\infty} xf_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

— La série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} x f_n(x)\right)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$car elle converge normalement. On a encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, |x f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}.$$

D'après le théorème de la double limite on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$ et donc $\boxed{S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ex}}$.

4. On applique encore le théorème de la double limite mais sur la somme à partir de 1.
   — Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n.n!}$.
   — La série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 1} f_n\right)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ (question 1.)

   On en déduit que $S(x) = \frac{1}{x} + K + \underset{x\to 0}{o}(1)$ où $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n.n!}$.

   On en déduit que $\boxed{S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$.

5. a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
xS(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+x-n)}{n!(n+x)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!(n+x)} \\
&= \frac{1}{e} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+x)} \\
&= \frac{1}{e} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1+x)} \\
&= \frac{1}{e} + S(x+1).
\end{aligned}$$

   b) — En 0^+ : En faisant tendre x vers 0 on trouve que

$$\lim_{x\to 0^+} xS(x) = \frac{1}{e} + S(1) = 1 \quad \text{car } S \text{ est continue en } 1$$

   De ce fait $\boxed{S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}}$

   — En $+\infty$: En faisant tendre x vers $+\infty$ et en utilisant que $S(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question 3.a) on obtient que $\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \frac{1}{e}$ et donc $\boxed{S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ex}}$.

c) On a vu que $S(x) = \dfrac{1}{ex} + o(\frac{1}{x})$. En réinjectant dans l'équation fonctionnelle : $xS(x) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e(x+1)} + o(\frac{1}{x})$ et donc

$$S(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On réinjecte encore, $xS(x) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{e(x+1)} + \dfrac{1}{e(x+1)^2} + o(\frac{1}{x^2})$ et donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex(x+1)} + \frac{1}{ex^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{ex^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

6. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Maintenant, par récurrence on prouve que pour $k \in \mathbb{N}$

$$f_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^n(-1)^k k!}{n!(x+n)^{k+1}}.$$

En particulier, pour $n \geqslant 0$, on a que pour tout k, $|f_n^{(k)}|$ est décroissante et donc

$$||f_n^{(k)}||_\infty = |f_n^{(k)}(0)| = \frac{k!}{n!n^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n!}$$

On peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme.
- Pour tout entier n, les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car elle converge normalement. En effet la série $\left(\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{k!}{n!}\right)$ converge. Le fait d'ajouter $f_0^{(k)}$ ne change rien à la nature de convergence de la série de fonctions.

On en déduit que $\boxed{S \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty}$.

Exercice II

1. Fixons $x \in]-1, 1[$.

   a) On notera $||g||_\infty = sup_{\theta \in [0,\pi]}|g(\theta)|$ pour toute fonction g bornée sur $[0, \pi]$.
   $\sum_{n \geqslant 1} ||f_n||_\infty = \sum_{n \geqslant 1} \frac{|x|^n}{n}$ converge car $\frac{|x|^n}{n} = o_{n \to \infty}(|x|^n)$ et $\sum |x|^n$ converge absolument.
   Donc $\sum f_n$ $\boxed{\text{converge normalement}}$ sur $[0, \pi]$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_n : \theta \mapsto -x^n \sin(n\theta)$.
   De plus $||f'_n||_\infty = |x|^n$
   Donc $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, \pi]$.
   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et

   $$\forall \theta \in [0, \pi] \quad \boxed{f'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(n\theta)}$$

   c) Pour tout $\theta \in \mathbb{N}^*$ la série $\sum x^n e^{in\theta}$ est géométrique de raison $xe^{i\theta}$. Le module de cette raison est $|x| < 1$ donc cette série converge, et

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta) = \frac{1er\ terme}{1 - raison} = \frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$$

   $$Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta)\right) = x\, Im\left(\frac{e^{i\theta}(1 - xe^{-i\theta})}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})}\right) = \frac{x \sin\theta}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}$$

   d)
   $$\forall \theta \in [0, \pi] \quad f'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} Im(x^n \sin(n\theta) = -Im\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta)\right) = \boxed{\frac{-x\sin\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}}$$

   e) Par la question précédente, f a même dérivée sur l'intervalle $[0, \pi]$ que $\theta \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$ donc il existe un réel C tel que

   $$\forall \theta \in [0, \pi] \quad f(\theta) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$$

   Évaluant en $\theta = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2 - 2x) + C = -\ln(1 - x) + C$ donc en utilisant le résultat admis, $C = 0$.
   Ainsi

   $$\forall \theta \in [0, \pi] \quad \boxed{\ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta) = -2f(\theta) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}}$$

   f) Comme $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \pi]$, on peut intégrer terme à terme. Donc

   $$F(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f_n(\theta)d\theta = -2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n \sin(n\theta)}{n^2}\right]_{\theta=0}^{\pi} = -2\sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}$$

2. On fixe $\theta \in]0, \pi[$.

3. $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - 2x\cos\theta + 1$ est une fonction polynomiale de degré deux et son coefficient dominant est strictement positif.
Donc elle décroît strictement sur $]-\infty, -\frac{-2\cos\theta}{2}] =]-\infty, \cos\theta]$ et croît strictement sur $[\cos\theta, +\infty[$.
On en déduit que :
- si $\cos\theta \leqslant 0$, g est strictement croissante sur $[0,1]$
- si $\cos\theta > 0$, g est strictement décroissante sur $[0,\cos\theta]$ et strictement croissante sur $[\cos\theta, 1]$
Par croissance de la fonction $\sqrt{.}$ on a :
- si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ alors
$$\forall x \in [0,1] \quad |1 - xe^{i\theta}| = \sqrt{g(x)} \geqslant \sqrt{g(0)} = 1$$
- si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ alors
$$\forall x \in [0,1] \quad |1 - xe^{i\theta}| \geqslant \sqrt{g(\cos\theta)} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leqslant |I_n(\theta)| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{x^n e^{i(n+1)\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{m} = \frac{1}{mn}$$
avec $m = \sin\theta$ si $\theta \in]0, \pi/2]$ et $m = 1$ si $\theta \in]\pi/2, \pi[$.
Par encadrement la suite $(|I_n(\theta)|)$ converge vers 0 donc $\boxed{\text{la suite } (I_n(\theta)) \text{ converge vers } 0}$.
remarque : on aurait aussi pu dire que g étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est minorée et atteint sa borne inférieure m ; comme de plus g est à valeur strictement positive, $m > 0$.

5.
$$\boxed{V_n(\theta) = \int_0^1 x^0 e^{i\theta}\frac{1-(xe^{i\theta})^n}{1-xe^{i\theta}}dx = I(\theta) - I_n(\theta) \underset{n\to\infty}{\to} I(\theta) - 0 = I_(\theta)}$$

6. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 x^{k-1}e^{ik\theta}dx = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$.
Donc par la question précédente, la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et sa somme est $I(\theta)$.
Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(k\theta)}{k} \text{ converge et sa somme est } Re(I(\theta))}$.
Enfin
$$\begin{aligned}
Re(I(\theta)) &= \int_0^1 Re\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right)dx \\
&= \int_0^1 Re\left(\frac{e^{i\theta}(1-xe^{-i\theta})}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})}\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1+x^2-2x\cos\theta}dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln(1+x^2-2x\cos\theta)\right]_{x=0}^1 \\
&= -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta)
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\boxed{\forall\theta \in]0,\pi[\quad \sum_{n=1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2(1-\cos\theta)) = -\ln(2\sin(\theta/2))}$$
Appliquant le résultat ci-dessus à $\pi - \theta$ (qui reste dans $]0,\pi[$:
$$\boxed{\forall\theta \in]0,\pi[\quad \sum_{n=1} \frac{(-1)^n\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2(1+\cos\theta)) = -\ln(2\cos(\theta/2))}$$

$\boxed{\textbf{Exercice III}}$

1. a) Notant $f : \mathbb{R} \ni x_1 \mapsto x_1$ et $g : \mathbb{R}^{n-1} \ni (x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_2 + x_3, \dots, x_2 + \cdots + x_n)$ on a $S_1 = f \circ X_1$ et $(S_2 - S_1, \dots, S_n - S_1) = g \circ (X_2, \dots, X_n)$.

   Donc par indépendance de $X_1, \dots, X_n$ et par le $\boxed{\text{lemme des coalitions}}$, S_1 est indépendante de la variable $(S_2 - S_1, \dots, S_n - S_1)$.

   b) Soit $n \geqslant 1$

   i) Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}&(S_2 - S_1 = \sigma_1, S_3 - S_1 = \sigma_2, \dots, S_n - S_1 = \sigma_{n-1})\\ &= \boxed{(X_2 = \sigma_1, X_3 = \sigma_2 - \sigma_1, \dots, X_n = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2})}\end{aligned}$$

   ii) Dans les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
& P(S_2 - S_1 = \sigma_1, S_3 - S_1 = \sigma_2, \dots, S_n - S_1 = \sigma_{n-1})\\
= \ & P(X_2 = \sigma_1, X_3 = \sigma_2 - \sigma_1, \dots, X_n = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2})\\
= \ & P(X_2 = \sigma_1) P(X_3 = \sigma_2 - \sigma_1) \cdots P(X_n = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2})\\
& \qquad \text{car } X_2, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}\\
= \ & P(X_1 = \sigma_1) P(X_2 = \sigma_2 - \sigma_1) \cdots P(X_{n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2})\\
& \qquad \text{car les } X_i \text{ suivent tous la même loi}\\
= \ & P(X_1 = \sigma_1, X_2 = \sigma_2 - \sigma_1, \dots X_{n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-2})\\
& \qquad \text{car } X_1, \dots, X_{n-1} \text{ sont indépendantes}\\
= \ & P(S_1 = \sigma_1, S_2 = \sigma_2, \dots, S_{n-1} = \sigma_{n-1})
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{(S_2 - S_1, S_3 - S_1, \dots, S_n - S_1) \text{ suit la même loi que } (S_1, \dots, S_{n-1})}$.

   c) Soient $a, c \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant a \leqslant c - 1$.

   Alors $A_{a,c,0} = \emptyset$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P(A_{a,c,n}) &= P\Big((S_1=+1)\cap A_{a,c,n}\Big)+P\Big((S_1=-1)\cap A_{a,c,n}\Big)\\
&= P\Big(S_1=+1, 0<a+1+S_2-S_1<c,\dots,\\
&\qquad 0<a+1+S_{n-1}-S_1<c, a+1+S_n-S_1=c\Big)\\
&\quad +P\Big(S_1=-1, 0<a-1+S_2-S_1<c,\dots,\\
&\qquad 0<a-1+S_{n-1}-S_1<c, a-1+S_n-S_1=c\Big)\\
&= P(S_1=+1)P\Big(0<a+1+S_2-S_1<c,\dots,\\
&\qquad 0<a+1+S_{n-1}-S_1<c, a+1+S_n-S_1=c\Big)\\
&\quad +P(S_1=-1)P\Big(0<a-1+S_2-S_1<c,\dots,\\
&\qquad 0<a-1+S_{n-1}-S_1<c, a-1+S_n-S_1=c\Big)\\
&\qquad \text{par la question 1)a)}\\
&= p\ P\Big(0<a+1+S_1<c,\dots,0<a+1+S_{n-2}<c, a+1+S_{n-1}=c\Big)\\
&\quad +q\ P\Big(0<a-1+S_1<c,\dots,0<a-1+S_{n-2}<c, a-1+S_{n-1}=c\Big)\\
&\qquad \text{par la question 1)b)}\\
&= pP(A_{a+1,c,n-1})+qP(A_{a-1,c,n-1})
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{s_{a,c}=0+\sum_{n=1}^{\infty}(pP(A_{a+1,c,n-1})+qP(A_{a-1,c,n-1}))=p\,s_{a+1,c}+q\,s_{a-1,c}}$$

par linéarité de la sommation et changement d'indice $n'=n-1$.

2. La relation précédente peut aussi s'écrire

$$s_{a+1,c}=\frac{1}{p}s_{a,c}-\frac{q}{p}s_{a-1,c}$$

Pour c fixé, c'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $X^2-\frac{X}{p}-\frac{q}{p}$
1 est racine évidente et le produit des racines est $\frac{q}{p}=\rho$.
Premier cas : $\rho\neq 1$.
Le polynôme caractéristique a deux racines distinctes 1 et ρ donc il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que pour tout a tel que $0\leqslant a\leqslant c$ (avec $c\geqslant 1$)

$$s_{a,c}=A+B\rho^a$$

Or $s_{c,c}=P(\Omega\cup\emptyset\cup\dots)=1$ et $s_{0,c}=P(\emptyset)=0$.
Donc $\left\{\begin{array}{rcl} A+B\rho^c & = & 1\\ A+B & = & 0\end{array}\right.$.
Par soustraction membre à membre,

$$B(\rho^c-1)=1$$

d'où $B=\frac{1}{\rho^c-1}$

Puis $A = -B$.
Ainsi pour tout a tel que $0 \leqslant a \leqslant c$:

$$s_{a,c} = \boxed{\frac{\rho^a - 1}{\rho^c - 1}}$$

Second cas : $\rho = 1$.
Le polynôme caractéristique admet 1 pour racine double donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout a tel que $0 \leqslant a \leqslant c$ (avec $c \geqslant 1$,

$$s_{a,c} = A + Ba$$

Par le raisonnement précédent, $\left\{ \begin{array}{rcl} A + Bc & = & 1 \\ A + 0 & = & 0 \end{array} \right.$ donc $A = 0$ et $B = \frac{1}{c}$.
Ainsi pour tout a tel que $0 \leqslant a \leqslant c$:

$$s_{a,c} = \boxed{\frac{a}{c}}$$

3. a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$(a + S_i = 0) = (a - S'_i = 0) = (S'_i = a) = (c - a + S'_i = c)$$
$$(0 < a + S_i < c) = (0 < a - S'_i < c) = (a - c < S'_i < a) = (0 < c - a + S'_i < c)$$

Donc posant $\boxed{a' = c - a}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{a,c,n} = (0 < a' + S'_1 < c, \ \ldots, \ 0 < a' + S'_{n-1} < c, \ a' + S'_n = c)$$

b) Remplacer les S_i par les S'_i revient à remplacer les X_i par les $X'_i = -X_i$.
Or les X'_i sont indépendants par le lemme des coalitions (appliqué à toute sous-famille finie) et suivent la même loi, qu'on déduit de celle des X_i en échangeant p et q.
Par la question précédente, on a donc :

$$r_{a,c} = \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{\dfrac{(1/\rho)^{c-a} - 1}{(1/\rho)^c - 1} = \dfrac{\rho^a - \rho^c}{1 - \rho_c}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \boxed{\dfrac{c-a}{c}} & \text{si } \rho = 1 \end{array} \right.$$

c) Si $\rho \neq 1$ on a :

$$s_{a,c} + r_{a,c} = \frac{\rho^a - 1 + \rho^c - \rho^a}{\rho^c - 1} = \boxed{1}$$

Si $\rho = 1$ on a :

$$s_{a,c} + r_{a,c} = \frac{a + c - a}{c} = \boxed{1}$$

d) Prouvons que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0 < a + S_n < c) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{a,c,n} \sqcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{a,c,n}}$$

où la barre désigne la complémentation dans Ω.
L'union au membre de droite est bien disjointe car s'il existait $\omega \in \Omega$ et $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_{a,c,n} \cap B_{a,c,n'}$ on aurait :
si $n = n'$ alors $S_n(\omega) = O = c$, ce qui est contradictoire

si $n < n'$ alors $S_n(\omega) = c$ donc $\omega \notin B_{a,c,n'}$
si $n > n'$ alors $S_{n'}(\omega) = 0$ donc $\omega \notin A_{a,c,n}$
Soit $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0 < a + S_n < c)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \notin A_{a,c,n}$ car $S_n(\omega) \neq c$ et $\omega \notin B_{a,c,n}$ car $S_n(\omega) \neq 0$. Ainsi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0 < a + S_n < c) \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{a,n,c} \sqcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a,n,c}}$$

Prouvons l'inclusion réciproque par contraposée.
Soit $\omega \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0 < a + S_n < c)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{(0 < a + S_n < c)}$
Alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, \quad \omega \notin (0 < a + S_n < c)$ n'est pas vide. Soit n_0 son plus petit élément.
Si $n_0 = 0$ alors $a = 0$ ou $a = c$. Dans le premier cas $\omega \in B_{a,c,0} = \Omega$ et dans le second cas $\omega \in A_{a,c,0} = \Omega$.
Si $n_0 > 0$ alors :

$$\forall i \in [\![0, n_0 - 1[\![\quad 0 < a + S_i(\omega) < c$$

De plus $a + S_{n_0}(\omega) \geqslant c$ ou $a + S_{n_0}(\omega) \geqslant 0$. Dans le premier cas $a + S_{n_0}(\omega) = c$ car $a + S_{n_0}(\omega) = a + S_{n_0-1}(\omega) + X_{n_0}(\omega)$ est un entier strictement inférieur à $c+1$. Dans le second cas $a + S_{n_0}(\omega) = 0$ par un raisonnement analogue. Donc $\Omega \in A_{a,c,n_0} \cup B_{a,c,n_0}$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0 < a + S_n < c)) &= 1 - P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{a,c,n}) - P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{a,c,n}) \\ &= 1 - s_{a,c} - r_{a,c} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Cet exercice modélise la situation suivante : un joueur arrive à la table de roulette avec un somme de a euros. Il mise à chaque fois un euro sur la couleur rouge. Si rouge sort il double sa mise donc gagne un euro. Sinon il perd sa mise. Il joue ainsi jusqu'à disposer de c euros ou être ruiné.
p désigne la probabilité de sortie de la couleur rouge.
$A_{a,c,n}$ est l'événement "le joueur réalise son objectif de gain en exactement n coups"
$B_{a,c,n}$ est l'événement "le joueur est ruiné en exactement n coups"
$s_{a,c}$ est la probabilité que le joueur réalise son objectif
$r_{a,c}$ est la probabilité que le joueur soit ruiné.
La dernière question montre que la probabilité que le jeu dure indéfiniment est nulle.
Prenons un exemple numérique : $a = 900$ et $b = 1000$.
Si $p = 1/2$ alors $\rho = 1$ et $s_{a,c} = a/c = 90\%$.
Mais une vraie roulette comporte 18 numéros rouges, 18 numéros noirs et 2 numéros verts (0 et 00). Dans cette situation $p = 18/38$ et $\rho = 20/18$.

$$s_{a,c} = \frac{\rho^{900} - 1}{\rho^{1000} - 1} \approx 0.003\%$$

Ce qui laisse songeur.