Problème 1

Partie I

1) Si $a = b$ alors $a_0 = b_0 = a$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = b_n = a$ alors $a_{n+1} = b_{n+1} = a$ (en particulier car $\sqrt{a^2} = |a| = a$).
On en déduit par récurrence que

$$\boxed{\text{Si } a = b \text{ alors } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont constantes égales à } a}$$

2) Soient $x, y \geqslant 0$. On a $0 \leqslant (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$. On en déduit (inégalité arithmético-géométrique) que

$$\boxed{\forall x, y \geqslant 0,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}}$$

On pouvait aussi que l'inégalité est évidente si x ou y est nul, et sinon,

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \exp(\frac{1}{2}(\ln x + \ln y)) \\ &\leqslant \exp(\ln \frac{x+y}{2}) \quad \text{par concavité du logarithme et croissance de l'exponentielle} \\ &= \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

3) Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n, b_n \geqslant 0$. Avec la question précédente, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant b_n$$

Soit $n \geqslant 1$. On a $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ et $b_{n+1} \leqslant \frac{2b_n}{2} = b_n$. Ceci montre que

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ croît et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ décroît}}$$

Comme $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$ pour $n \geqslant 1$, les suites sont donc à termes dans $[a_1, b_1]$ à partir du rang 1 et donc bornées (bornée équivaut à bornée à partir d'un certain rang).

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées}}$$

4) Par théorème de limite monotone, les suites sont convergentes à limite ℓ_a et ℓ_b dans $[a_1, b_1]$ par passage aux limites dans les inégalités larges, et donc strictement positives. En pasant à la limite dans la relation de récurrence pour (b_n), on obtient $\frac{\ell_a + ellb}{2} = \ell_b$ donc $\ell_a = \ell_b$.

$$\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont convergentes de même limite strictement positive}}$$

5) Notons (a'_n) et (b'_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $a'_0 = b$ et $b'_0 = a$. On a alors $a'_1 = a_1$ et $b'_1 = b_1$. Comme les suites sont récurrentes d'ordre 1, elles sont égale à partir du rang 1 et donc de même limite.
De même, Notons (α_n) et (β_n) les suites définies par les mêmes relations de récurrence mais avec $\alpha_0 = \lambda a_0$ et $\beta_0 = \lambda b$. On a alors $\alpha_1 = \lambda a_1$ et $\beta_1 = \lambda b_1$ puis, par récurrence simple, $\alpha_n = \lambda a_n$ et $\beta_n = \lambda b_n$ pour tout n. Finalement,

$$\boxed{M(b,a)=M(a,b) \text{ et } \forall \lambda>0,\ M(\lambda a,\lambda b)=\lambda M(a,b)}$$

6) On utilise ceci avec $\lambda = 1/a > 0$: $\frac{1}{a}M(a,b) = M(1,b/a) = f(b/a)$. On a donc

$$\boxed{M(a,b) = af\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Partie II

7) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et équivalent au voisinage des infinis à $1/t^2$ et donc intégrable sur de tels voisinages. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. A fortiori,

$$\boxed{I(a,b) \text{ et } J(a,b) \text{ existent}}$$

La fonction f ci-dessus étant paire, son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ vaut celle sur $\mathbb{R}^-$: en effectuant le changement de variable $x=-t$, $dx=-dt$: $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{-\infty} f(-t)(-dt) = \inf_{-\infty}^0 f(t)dt$. Ainsi, par relation de Chasles

$$\boxed{J(a,b) = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f = 2I(a,b)}$$

8) $s \mapsto \frac{1}{2}\left(s - \frac{ab}{s}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante comme somme de telles fonctions. Ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$. Posons $t = \frac{1}{2}\left(s-\frac{ab}{s}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2(a+b)^2 + (s^2-ab)^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^4 + (a^2+b^2)s^2 + a^2b^2\right) \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+a^2)(s^2+b^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{ab})^2 + t^2 &= ab + \frac{1}{4s^2}(s^2-ab)^2 \\
&= \frac{1}{4s^2}(s^2+ab)^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les conventions d'écriture usuelles

$$dt = \frac{ds}{2}\left(1+\frac{ab}{s^2}\right) = \frac{ds}{2s^2}(s^2+ab)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+t^2)(\sqrt{ab}^2+t^2)}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2s^2}}{\frac{1}{4s^2}} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}} = \boxed{2I(a,b)}
\end{aligned}$$

9) Par les deux questions précédentes,

$$\forall a,b>0, \quad I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b)$$

Par récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a, b)}$$

10) a) On utilise le théorème de convergence dominée.

- $f_n\ :\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(a_n^2+t^2)(b_n^2+t^2)}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(M(a,b)^2+t^2)(M(a,b)^2+t^2)}}$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n, b_n \geqslant a_1 > 0$ (partie I) on en déduit que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{a_1^2 + t^2} = \varphi(t)$$

La fonction φ (indépendante de n) est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\varphi(t) = O_{t\to\infty}(1/t^2)$ et car $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} I(a_n, b_n) = I(M(a, b), M(a, b))$$

b) Par ailleurs, par la question 9),

$$\lim_{n\to+\infty} I(a_n, b_n) = I(a, b)$$

Par unicité de la limite, on a donc :

$$\boxed{I(M(a, b), M(a, b)) = I(a, b)}$$

11) On remarque que

$$\forall \alpha > 0,\ I(\alpha, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} = \left[\frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Ainsi, avec la question 10,

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$$

ou encore

$$\boxed{M(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}}$$

Partie III

12) $s \mapsto x/s$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, strictement décroissante et ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont $+\infty$ et 0. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} &= \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} \frac{(-x/s^2)\ ds}{\sqrt{(1+x^2/s^2)(x^2+x^2/s^2)}} \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}\end{aligned}$$

Par relation de Chasles, on a

$$I(1, x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(1+s^2)}}$$

On conclut ainsi que

$$\boxed{\forall x > 0,\ I(1,x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}}\,dt}$$

13) Remarquons que

$$\forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Par concavité de $y \mapsto \sqrt{y}$ (courbe en dessous de la tangente en $y = 1$) on a aussi

$$\forall y \geqslant -1,\ \sqrt{1+y} \leqslant 1 + \frac{y}{2}$$

On pouvait aussi utiliser la quantité conjuguée : $\sqrt{1+y} - 1 = \frac{1+y-1}{\sqrt{1+y}+1} \leqslant \frac{y}{2}$ pour $y \geqslant 0$ (et également pour $-1 \leqslant y \leqslant 0$ car la multiplication par y renverse alors les inégalités).
Ainsi,

$$\forall t \in [0, \sqrt{x}],\ \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right| \leqslant \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+t^2}} \leqslant \frac{x}{2\sqrt{x^2+t^2}}$$

On intégre cette inégalité entre 0 et $\sqrt{x}$ (aucun problème d'existence) pour obtenir

$$\left|I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt\right| \leqslant 2\int_0^{\sqrt{x}} \left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\right|\,dt \leqslant x\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

Or $x = o_{x\to 0}(1)$. On en conclut donc que

$$\boxed{I(1,x) - 2\int_0^{\sqrt{x}} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \text{ est négligeable devant } 2\int_0^{\sqrt{x}} \tfrac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt \text{ quand } x \text{ tend vers } 0^+}$$

14) La dérivée de $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1+\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Par changement de variable linéaire $s = t/x$, on. a

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{ds}{1+s^2} = \left[\ln(s + \sqrt{1+s^2})\right]_0^{1/\sqrt{x}}$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

15) On a

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) = -\frac{\ln(x)}{2} + \ln(1+\sqrt{x+1}) = -\frac{\ln x}{2} + o_0(1) = -\frac{\ln x}{2} + o_0(\ln x)$$

(car ln tend vers $-\infty$ en 0) donc équivaut à $-\ln(x)/2$ quand x tend vers 0^+.
Or, d'après la question 13, quand $x \to 0$

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt$$

On en déduit avec la question 14 que

$$I(1,x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

Comme $f(x) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}$, on a ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)}}$$

16) On a (avec la partie I)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(1, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}M(x,1) = \frac{1}{x}M(1,x) = \frac{1}{x}f(x)$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0^+$ et la question précédente donne alors

$$f\left(x\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} -\frac{\pi x}{2\ln(1/x)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

Partie IV

17) Avec les questions 7 et 8,

$$I(1,x) = I\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right)$$

On utilise alors la question 5 avec $\lambda = \frac{1+x}{2}$:

$$M\left(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x}\right) = \frac{1+x}{2}M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

On conclut alors avec la question 11 (utilisée deux fois) que

$$\boxed{I(1,x) = \frac{2}{1+x}I\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

18) a) Posons $h : t \mapsto \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t}$. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. On a alors pour $t > 0$,

$$h'(t) = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

On en déduit que h est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme h est à valeurs positives et que que $h(1) = 1$ on obtient que $h(\mathbb{R}_+) \subset [0,1]$.
On en déduit que $w_1 = h(x) \in [0,1]$ et que, par une récurrence immédiate, pour $n \geqslant 1$, $w_n \in [0,1]$.
De plus, $h(t) - t = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+t} - t = \dfrac{2\sqrt{t} - t - t^2}{1+t}$. On remarque que pour $t \in [0,1]$, $t^2 \leqslant t \leqslant \sqrt{t}$ et donc $h(t) - t \geqslant 0$.
De ce fait, pour $n \geqslant 1$, $w_{n+1} - w_n = h(w_n) - w_n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

Comme de plus, la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée (par 1), elle converge. Notons ℓ sa limite, on sait de part la continuité de h que ℓ vérifie $h(\ell) = \ell$ (et que $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite dans les inégalités).
Or

$$h(\ell) = \ell \iff 2\sqrt{\ell} - \ell - \ell^2 = 0 \iff \sqrt{\ell}(2 - \sqrt{ell} - \sqrt{ell}^3) = 0$$

On étudie l'équation $X^3 - X - 2 = 0$; on voit que 1 est une racine évidente et on peut factoriser, $X^3 - X - 2 = (X-1)(X^2+X+2)$. Comme le polynôme X^2+X+2 n'a pas de racines réelles, on obtient finalement que

$$h(\ell) = \ell \iff \sqrt{\ell} \in \{0,1\} \iff \ell \in \{0,1\}$$

Pour finir, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n \geqslant w_1 > 0$ donc $\ell \geqslant w_1 > 0$.

$$\boxed{(w_n) \text{ converge vers } 1}$$

b) On procède par récurrence.
- $\boxed{\text{I}}$: la question 17 donne $I(1,x) = \frac{2}{1+x} I(1,w_1)$, ce qui correspond à la formule pour $n = 0$.
- $\boxed{\text{C}}$: supposons le résultat vrai à un rang $n \geqslant 0$. La question 17 donne

$$I(1, w_{n+1}) = \frac{1}{2 + w_{n+1}} I(1, w_{n+2})$$

Par le résultat au rang n, on déduit celui au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I(1,x) = I(1,w_{n+1}) \prod_{k=0}^{n} \frac{2}{1+w_k}}$$

c) Commençons par montrer, comme à la question 10.a) que comme (w_n) tend vers 1, la suite $(I(1,w_n))$ tend vers $I(1,1)$. Pour tout entier n on pose f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_n^2+t^2)}}$$

- Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
- Comme (w_n) tend vers 1, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2)}}$ qui est aussi continue (par morceaux)
- Hypothèse de domination : On a vu à la question 18.a) que pour $n \geqslant 1$, $w_n \geqslant w_1 > 0$. On obtient donc que pour tout entier n et tout réel t,

$$|f_n(t)| = f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_n^2+t^2)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_1^2+t^2)}}$$

Posons alors $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(w_1^2+t^2)}}$.

C'est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on obtient, comme d'habitude que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} I(1,w_n) = I(1,1) = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après le calcul de la question 11)

On en déduit que (p_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\pi}{2I(1,x)}$$

$$\boxed{\text{En notant } \ell \text{ la limite de } (p_n)\text{, on a } \ell I(1,x) = \tfrac{\pi}{2}}$$

VARIANTE POUR LA QUESTION 18

a) Posons $a = x$ et $b = 1$ et définissons les suites (a_n) et (b_n) comme dans la partie I.

Posons également $\forall n \in \mathbb{N}\ w'n = \frac{a_n}{b_n}$. Alors $w'_0 = x$ et pour tout naturel n,

$$w'_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{\frac{a_n+b_n}{2}} = \frac{2b_n \frac{a_n}{b_n}}{b_n(\frac{a_n}{b_n}+1)} = \frac{2\sqrt{w'_n}}{1+w'_n}$$

Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{w_n = w'_n = \frac{a_n}{b_n}}$.

Ainsi $\boxed{w_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{M(a,b)}{M(a,b)} = 1}$.

c) Remarquons que pour naturel k,

$$\frac{1+w_k}{2} = \frac{1+\frac{a_k}{b_k}}{2} = \frac{b_k + a_k}{2b_k} = \frac{b_{k+1}}{b_k}$$

Ainsi par télescopage,

$$\boxed{p_n = \frac{b_{n+1}}{b_0} = b_{n+1}}$$

Donc

$$p_n \underset{n\to\infty}{\to} \boxed{\ell = M(a,b) = M(x,1) = M(1,x) = \frac{\pi}{2I(1,x)}}$$

Problème 2

Partie I : Un exemple

1)

$$\chi_{A_0} = (X-0)(X-3) - 1.(-2) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

$$\chi_{B_0} = (X-2)(X+1) - 1.(-2) = X^2 - X = X(X-1)$$

Ainsi $\boxed{Sp(A_0) = \{1,2\} \text{ et } Sp(B_0) = \{0,1\}}$.

2) Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}E_{11} + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21} + m_{22}E_{22}$,

$$\begin{aligned} h_{A_0,B_0}(M) &= \begin{pmatrix} 2m_{21} & 2m_{22} \\ -m_{11}+3m_{21} & -m_{12}+3m_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m_{11}-m_{12} & 2m_{11}-m_{12} \\ 2m_{21}-m_{22} & 2m_{21}-m_{22} \end{pmatrix} \\ &= (-2m_{11}+m_{12}+2m_{21})E_{11} + (-2m_{11}+m_{12}+2m_{22})E_{12} \\ &\quad +(-m_{11}+m_{21}+m_{22})E_{21} + (-m_{12}-2m_{21}+4m_{22})E_{22} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

Admettant l'expression de χ_{H_0} donnée par l'énoncé,

$$\chi_{H_0} = X(X^3 - 4X^2 + 5X - 2) = X(X-1)(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)^2(X-2)$$

et donc $\boxed{Sp(H_0) = \{0, 1, 2\}}$.
Par ailleurs,

$$\boxed{\left\{a - b/(a,b) \in Sp(A_0) \times Sp(B_0)\right\} = \{1-0, 1-1, 2-0, 2-1\} = \{1, 0, 2\} = Sp(H_0)}$$

3) Chacune de ces deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a $\boxed{\text{deux valeurs propres distinctes}}$ donc est $\boxed{\text{diagonalisable}}$.

4) Comme $\chi_{H_0} = X(X-1)^2(X-2)$ (scindé sur $\mathbb{C}$, bien évidemment) et comme les dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont aux moins égales à 1, H_0 est diagonalisable si et seulement si $E_1(H_0)$ est de dimension 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} X \in E_1(H_0) &\iff (H_0 - I_4)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x = t = \frac{y + 2z}{3} \end{aligned}$$

Ainsi $E_1(H_0)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants : si y et z sont deux complexes tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ y \\ z \\ * \end{pmatrix},$$

alors $y = z = 0$.
Donc $\boxed{E_1(H_0) \text{ est de dimension 2 et ainsi, } H_0 \text{ est diagonalisable}}$.

Partie III : étude du cas général

5) $\chi_B = det(XI - B) = det({}^t(XI - B)) = det(X\,{}^tI -{}^t B) = det(XI -{}^t B) = \chi({}^tB)$
Donc χ_B et $\chi_{{}^tB}$ ont mêmes racines et ainsi $\boxed{B \text{ et } {}^tB \text{ ont même spectre}}$.

6) a) En posant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$,
$\boxed{V\,{}^tW = (v_i w_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}}$.
Comme V n'est pas nulle, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_{i_0} \neq 0$.
De même il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $w_{j_0} \neq 0$.
Ainsi $\boxed{V\,{}^tW \text{ n'est pas nulle}}$ puisque son coefficient d'indice (i_0, j_0) est non nul.

b)

$$\begin{aligned} h_{A,B}(V\,{}^tW) &= AV\,{}^tW - V\,{}^tWB = (AV)\,{}^tW - V\,{}^t({}^tBW) = (aV)\,{}^tW - V\,{}^t(bW) \\ &= (a-b)V\,{}^tW \end{aligned}$$

Comme $V\,{}^tW$ est de plus non nul, c'est un $\boxed{\text{vecteur propre de } h_{A,B}}$ $\boxed{\text{associé à la valeur propre } a - b}$.

c) Par la question précédente, $\boxed{\left\{a - b/(a, b) \in Sp(A) \times Sp(B)\right\} \subset Sp(h_{A,B})}$.

7) Soit i et j compris entre 1 et n. $PE_{i,j} = (0|\ldots|0|V_i|0|\ldots|0)$ où la colonne V_i est à la $j^{\text{ème}}$ place.

$$PE_{i,j}\,{}^tQ = (0|\ldots|0|V_i|0|\ldots|0)\begin{pmatrix} {}^tW_1 \\ \vdots \\ {}^tW_j \\ \vdots \\ {}^tW_n \end{pmatrix} = \boxed{V_i\,{}^tW_j}.$$

L'application ψ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à toute matrice M associe $PM{}^tQ$ est un automorphisme car elle est linéaire bijective (sa réciproque étant $M' \mapsto P^{-1}M'\,{}^t(Q^{-1})$).
Comme $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, son image $(V_i\,{}^tW_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ par ψ est une $\boxed{\text{base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

8) Supposons A et B diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquons que ${}^tB$ est aussi diagonalisable car si $B = RDR^{-1}$ avec $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et D réelle diagonale, alors ${}^tB = ({}^tR)^{-1}D\,{}^tR$.
Choisissant $(V_1, \ldots, V_n)$ base de vecteurs propres de A et $(W_1, \ldots, W_n)$ base de vecteurs propres de ${}^tB$, la famille $(V_i\,{}^tW_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de $h_{A,B}$.
Ainsi $\boxed{h_{A,B} \text{ est diagonalisable}}$.

9) a) Considérons l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ni M \mapsto MX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Elle est linéaire par bilinéarité du produit matriciel.
Montrons qu'elle et surjective. Soit $Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{C})$.

Complétons la famille libre (X) (elle est libre car $X \neq 0$) en une base $\mathscr{B} = (X, X_1, \ldots, X_{n-1})$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On sait alors qu'il existe un endomorphisme f de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui envoie chacun des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ vers le vecteur Y.

Notons *can* la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et posons $M = Mat_{can}(f)$. Alors $\varphi(M) = Y$ puisque les coefficients de MX sont les coordonnées de $Y = f(X)$ dans la base *can* (et les coefficients de X sont les coordonnées de X dans cette même base).

φ étant surjective et $(P_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ engendrant $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la famille $(\varphi(P_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ $\boxed{\text{engendre } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

b) On suppose que h_A est diagonalisable

On note $(P_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de h_A, chaque matrice P_{ij} étant associée à la valeur propre λ_{ij}.

Par le théorème de d'Alembert Gauss, comme χ_A est de degré $n \geqslant 1$, il admet au moins une racine $\mu \in \mathbb{C}$, donc A a au moins une valeur propre.

Soit μ une valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associé à μ.

Comme X n'est pas nul puisque c'est un vecteur propre, la famille $(P_{i,j}X)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ engendre $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ d'après la question précédente. Donc on peut en extraire une base $(P_{ij}X)_{(i,j) \in J}$, où J est une partie de $[\![1,n]\!]^2$ de cardinal n.

Notons alors que pour tout $(i,j) \in J$, comme $AP_{ij} - P_{ij}A = h_A(P_{ij}) = \lambda_{ij}P_{ij}$,

$$AP_{ij}X = (P_{ij}A + \lambda_{ij}P_{ij})X = (\mu + \lambda_{ij})P_{ij}X$$

donc $\boxed{P_{i,j}X \in E_{\mu+\lambda_{i,j}}(A)}$.

On a donc trouvé une base de vecteurs propres de A.

Cela signifie que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.