1) Soient S, W des variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé et à valeurs dans le même ensemble E.
Soit A une partie de E.

a)

$$\begin{aligned}(S \in A) &= (S \in A, S = W) \cup (S \in A, S \neq W) \\ &= (S = W, W \in A) \cup (S \in A, S \neq W) \\ &\subset (W \in A) \cup (S \neq W)\end{aligned}$$

b) Par la question précente, $P(S \in A) \leqslant P(W \in A) + P(S \neq W)$.
Donc $P(S \in A) - P(W \in A) \leqslant P(S \neq W)$.
Echangeant les rôles de S et W on a également $P(W \in A) - P(S \in A) \leqslant P(W \neq S)$.
Donc $\boxed{\left|P(S \in A) - P(W \in A)\right| \leqslant P(S \neq W)}$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda-\mu}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} \quad \text{par la formule du binôme}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)}$.

3) a) $P(X=0) = 1-p \leqslant e^{-p} = P(Y=0)$ car la fonction exponentielle est convexe donc son graphe est au dessus de sa tangente au point l'abscisse 0 et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\ \exp(x) \geqslant \exp(0) + \exp'(0)(x-0) = 1+x$.
$P(Y=1) = pe^{-p} \leqslant p = P(X=1)$.

4) $P(X=Y) = P(X=Y=1) + P(X=Y=0)$.
Or $(Y=1) \subset (X=1)$ donc $(X=Y=1) = (Y=1)$, et $(X=0) =\subset (Y=0)$ donc $(X=Y=0) = (X=0)$.
Ainsi $P(X=Y) = P(Y=1) + P(X=0) = \boxed{e^{-p}p + (1-p)}$.
Donc $P(X \neq Y) = 1 - P(X=Y) = p(1-e^{-p}) \leqslant p(1-(1-p)) = \boxed{p^2}$ car $e^{-p} \geqslant 1-p$.

5) a) Notant $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ on déduit du <u>lemme des coalitions</u> (avec n "coalitions", chaque "coalition" étant constituée d'une seule "nation") que $X_1 = \pi_1(X_1), \ldots, X_n = \pi_1(X_n)$ sont indépendantes.
Idem pour $Y_1 = \pi_2(Y_1), \ldots, Y_n = \pi_2(Y_n)$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $r \in [\![1,n]\!]$, $Y_1+\ldots+Y_r \hookrightarrow \mathcal{P}(rp)$.
La propriété est évidente au rang 1.
Soit $r \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $Y_1+\ldots+Y_r \hookrightarrow \mathcal{P}(rp)$.
D'après le lemme des coalitions, $Y_1+\ldots+Y_r$ et Y_{r+1} sont indépendantes car elles s'écrivent respectivement $f\circ(Y_1,\ldots,Y_r)$ et $g\circ Y_{r+1}$ avec

$$f:(y_1,\ldots,y_r)\mapsto y_1+\ldots+y_r \text{ et } g:t\mapsto t$$

Par la question 2), $(Y_1+\ldots+Y_r)+Y_{r+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $rp+p=(r+1)p$.
Ainsi par récurrence, $W=Y_1+\ldots+Y_n$ suit la $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } np}$.
Remarque : on pouvait aussi procéder sans récurrence en utilisant la formule (hors-programme) du multinôme valable pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tous $x_1,\ldots,x_n$ complexes (ou plus généralement éléments deux à deux permutables d'un anneau) :

$$(x_1+\ldots+x_n)^k=\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ i_1+\ldots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!\ldots i_n!}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$$

Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(W=k) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ i_1+\ldots+i_n=k} P(Y_1=i_1,\ldots,Y_n=i_n)\\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ i_1+\ldots+i_n=k} P(Y_1=i_1)\ldots P(Y_n=i_n) \quad \text{par indépendance de } Y_1,\ldots,Y_n\\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ i_1+\ldots+i_n=k} e^{-p}\frac{p^{i_1}}{i_1!}\ldots e^{-p}\frac{p^{i_n}}{i_n!}\\
&= e^{-np}\frac{p^k}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N},\ i_1+\ldots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!\ldots i_n!}\\
&= e^{-np}\frac{p^k}{k!}(1+\ldots+1)^k \quad \text{par la formule du multinôme}\\
&= e^{-np}\frac{p^kn^k}{k!}=\mathcal{P}(np)(\{k\})
\end{aligned}$$

Par ailleurs $S_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ car $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes et suivent chacune $\mathcal{B}(p)$.

c) $(S_n=W_n)\supset\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i=Y_i)$.
Par décroissance (au sens de l'inclusion) du passage au complémentaire,

$$(S_n\neq W_n)\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}(X_i\neq Y_i)$$

d) Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(n,p)(A)-\mathcal{P}(np)(A)| &= |P(S\in A)-P(W\in A)| \quad \text{par la question 4)b)}\\
&\leqslant P(S\neq W) \quad \text{par la question 1)}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n P(X_i\neq Y_i) \quad \text{par la question 4)c) et l'inégalité de Boole}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n p^2 \quad \text{par la question 3)b)}\\
&= np^2 \quad \text{(ce résultat est appelé \underline{inégalité de Le Cam})}
\end{aligned}$$

6) Soit (p_n) une suite à termes dans $[0,1]$ convergeant vers un réel λ.

a) D'après la question précédente, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |\mathcal{B}(n,p_n)(A) - \mathcal{P}(np_n)(A)| \leqslant np_n^2 = \frac{(np_n)^2}{n}$$

Or $\frac{(np_n)^2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda}{+\infty} = 0$. Par limite par encadrement,

$$|\mathcal{B}(n,p_n)(A) - \mathcal{P}(np_n)(A)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

donc

$$\mathcal{B}(n,p_n)(A) - \mathcal{P}(np_n)(A) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Appliquant le résultat précédent à $A = \{k\}$,

$$\mathcal{B}(n,p_n)(\{k\}) - \mathcal{P}(np_n)(\{k\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Or par continuité de la fonction exponentielle et de $t \mapsto t^k$,

$$\mathcal{P}(np_n)(\{k\}) = e^{-np_n}\frac{(np_n)^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Ainsi

$$\mathcal{B}(n,p_n)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p_n)(\{k\}) - \mathcal{P}(np_n)(\{k\}) + \mathcal{P}(np_n)(\{k\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0 + e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \boxed{\mathcal{P}(\lambda)(\{k\})}$$

b) Soit A une partie de $\mathbb{N}$.
Première méthode :

$$\mathcal{P}(np_n)(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(n)$$

avec $f_k(n) = \begin{cases} e^{-np_n}\frac{(np_n)^k}{k!} & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(n) \underset{n\to\infty}{\to} l_k$ avec $l_k = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

De plus (np_n) est convergente donc bornée. Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ majorant cette suite.
$\forall n,k \in \mathbb{N},\ f_k(n) \leqslant \frac{\mu^k}{k!}$ donc $||f_k||_{\infty,\mathbb{N}} \leqslant \frac{\mu^k}{k!}$.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, donc uniformément.
Par le théorème de la double limite,

$$\mathcal{P}(np_n)(A) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} l_k = \mathcal{P}(\lambda)(A)$$

.

Ainsi

$$\mathcal{B}(n,p_n)(A) = \mathcal{P}(np_n)(A) - \mathcal{P}(np_n)(A) + \mathcal{P}(np_n)(A) \underset{n\to+\infty}{\to} \boxed{0 + \mathcal{P}(\lambda)(A)}$$

Seconde méthode :
Soit $\epsilon > 0$.

Comme la série $\sum_k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ converge, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} < \epsilon/3$.
Posons $B = A \cap [\![0, k_0]\!]$ et $C = A \cap [\![k_0+1, +\infty]\!]$.
On a : $\mathcal{B}(n,p_n)(B) = \sum_{k\in B} \mathcal{B}(n,p_n)(\{k\}) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k\in B} \mathcal{P}(\lambda)(\{k\}) = \mathcal{P}(\lambda)(B)$ par linéarité de la limite et car B est fini.
Donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|\mathcal{B}(n,p_n)(B) - \mathcal{P}(\lambda)(B)| \leqslant \epsilon/3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}(n,p_n)(C) \leqslant \mathcal{B}(n,p_n)([\![k_0+1, +\infty[\![) = 1 - \mathcal{B}(n,p_n)([\![0, k_0]\!])$$

Or $\mathcal{B}(n,p_n)([\![0,k_0]\!]) \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{P}(\lambda)([\![0,k_0]\!])$ car $[\![0,k_0]\!]$ est fini.
Donc $\mathcal{B}(n,p_n)([\![k_0+1,+\infty[\![) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - \mathcal{P}(\lambda)([\![0,k_0]\!]) = \mathcal{P}(\lambda)([\![k_0+1,+\infty[\![)$.
Comme cette limite est strictement plus petite que $\epsilon/3$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1,\ \mathcal{B}(n,p_n)([\![k_0+1,+\infty[\![) \leqslant \epsilon/3$$

Soit $n \geqslant max(n_0, n_1)$.

$$|\mathcal{B}(n,p_n)(C) - \mathcal{P}(\lambda)(C)| \leqslant \mathcal{B}(n,p_n)(C) + \mathcal{P}(\lambda)(C) < \frac{2\epsilon}{3}$$

car $C \subset [\![k_0+1,+\infty[\![$.
Donc

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(n,p_n)(A) - \mathcal{P}(\lambda)(A)| &= \Big|\mathcal{B}(n,p_n)(B) - \mathcal{P}(\lambda)(B) + \mathcal{B}(n,p_n)(C) - \mathcal{P}(\lambda)(C)\Big| \\
&\leqslant \Big|\mathcal{B}(n,p_n)(B) - \mathcal{P}(\lambda)(B)\Big| + \mathcal{B}(n,p_n)(C) + \mathcal{P}(\lambda)(C) \\
&< 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Par définition de la limite,

$$\mathcal{B}(n,p_n)(A) \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{P}(\lambda)(A)$$