Exercice I

On pose $f_0 : t \mapsto 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geqslant 0$,

$$f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}.$$

1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2) La convergence de la suite (f_n) vers f est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $t > 0$, $|f_{n+1}(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur tout tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Exercice II

Soit $a \in]0,1[$ et b un réel strictement positif. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1 périodique et continue. On considère W la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$W : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n g(b^n x)$$

1) a) Justifier (proprement) que g est bornée.
   b) Montrer que la fonction W est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que W est continue et bornée. On majorera $||W||_\infty$ en fonction de $||g||_\infty$.
2) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f) : x \mapsto af(bx)$$

   a) Montrer que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que 1 n'est pas une valeur propre de T.
   c) Montrer que $T(W) = W - g$. Montrer de plus que W est l'unique fonction bornée vérifiant cette relation.
3) Dans la suite du problème on pose $g : x \mapsto \sin(2\pi x)$ et on suppose que b est un entier pair tel que $ab > 1$. On souhaite démontrer que, moyennant une hypothèse supplémentaire, W n'est dérivable nulle part.

   On fixe x_0 un réel.

   a) Montrer que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en x_0 et que si (α_m), (β_m) sont deux suites convergeant vers x_0 telle que pour tout entier m, $\alpha_m \leqslant x_0 \leqslant \beta_m$ et $\alpha_m < \beta_m$ alors

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = f'(x_0)$$

   b) Justifier que pour tout entier m il existe un entier k_m tel que $b^m x_0 - k_m$ appartienne à l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

   Dans la suite du devoir on pose $\alpha_m = \dfrac{4k_m - 3}{4b^m}$ et $\beta_m = \dfrac{4k_m + 3}{4b^m}$

c) Rappeler la formule de $\sin p - \sin q$ et montrer que pour tous réels x et y, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

En déduire que

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| \leqslant (2\pi) \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n$$

d) Calculer $g(b^m \alpha_m)$, $g(b^m \beta_m)$. Montrer que pour $n > m$, $g(b^n \alpha_m) = g(b^n \beta_m) = 0$.

e) Montrer que

$$\frac{W(\beta_m) - W(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \leqslant \left(\frac{2\pi}{ab - 1} - \frac{4}{3}\right)(ab)^m$$

f) En déduire que si $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi$ la fonction W n'est pas dérivable en x_0. Conclure.