## Exercice I

On pose

$$u : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt, \quad v : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt$$

De même, on pose

$$U : (x, r) \mapsto \int_0^{r} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt, \quad V : (x, r) \mapsto \int_0^{r} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt$$

1) *Étude des fonctions $U$ et $V$.*
   a) Montrer que les fonctions $U$ et $V$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.
   b) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial r}$.
2) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.*
   a) Justifier que $u$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
   b) Montrer que la fonction $u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.
3) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$.*
   Pour tout $x > 0$ et tout $r \geqslant 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x, r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xre^{-it}} dt$$

   a) Montrer que la fonction $r \mapsto \varphi(x, r)$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Donner, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'expression (sans intégrale) de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r)$.
   b) Montrer que pour $(x, r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$,

$$U(x, r) - V(x, r) = i\varphi(x, r) - i\varphi(1, r)$$

   c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x, r)$ lorsque $r$ tend vers $+\infty$.
   d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.

## Exercice II

Soit $f$ une application dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Soit $G : (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t) dt$.

1) Soit $F$ la primitive de $f$ nulle en 0.
   Donner le développement limité d'ordre 2 de $F$ en 0, avec un reste sous la forme $x^2 \varepsilon(x)$ (où $\varepsilon \to 0$ en 0) et non un petit $o$.
2) Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que $G(h, y + k)$ admet un développement limité d'ordre 1 quand $(h, k) \to (0, 0)$ (avec un reste de la forme $||(h, k)||\, \mu(h, k)$ où $\mu \to 0$ en $(0, 0)$).
3) En déduire que $G$ admet un prolongement à $\mathbb{R}^2$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$.