Exercice I

1) *Étude des fonctions U et V.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\phi_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$ et $\psi_x : t \mapsto \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}$ qui sont définies et continues sur $]0,+\infty[$.
Au voisinage de 0. On a

$$\phi_x(t) = \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t} = \frac{1-tx-(1-t)+o(t)}{t} = 1-x+o(1)$$

Cela montre que la fonction ϕ_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi_x(0) = 1-x$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$. De même,

$$\psi_x(t) = \frac{e^{itx}-e^{it}}{t} = \frac{1+itx-(1+it)+o(t)}{t} = i(x-1)+o(1)$$

Cela montre que la fonction ψ_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $\psi_x(0) = i(x-1)$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$.
On en déduit que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, les fonctions ϕ_x et ψ_x sont intégrables sur $[0,r]$; les fonctions U et V sont définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme ϕ_x et ψ_x sont continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $r \mapsto U(x,r)$ et $r \mapsto V(x,r)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. De plus

$$\forall r \in \mathbb{R}, \frac{\partial U}{\partial r}(x,r) = \phi_x(r) \text{ et } \frac{\partial V}{\partial r}(x,r) = \psi_x(r)$$

2) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ϕ_x est continue sur $[0,+\infty[$. De plus

$$t^2\phi_x(t) = te^{-tx} - te^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Cela montre que $\phi_x(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ la fonction ϕ_x aussi. Finalement $u(x)$ est bien définie.

b) Appliquons le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres. Notons pour cette question

$$\phi : (x,t) \mapsto \phi_x(t) = \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$$

i) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$

ii) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

iii) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \phi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-tx}}{t} = -e^{-tx}$$

De plus la fonction $(x,t) \mapsto -e^{-tx}$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

α) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto -e^{-tx}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$

β) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto -e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

γ) Domination locale : pour tout $a > 0$,

$$\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |-e^{-tx}| \leqslant e^{-ta}$$

Or $t \mapsto e^{-ta}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $e^{-ta} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ comme en 2.a)

On en déduit que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$,

$$u'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{tx}dt = \left[\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}$$

c) On déduit de la question précédente qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$u : x \mapsto -\ln(x) + C$$

En remarquant que pour $x = 1$, la fonction $t \mapsto \phi(1,t)$ est la fonction nulle, on obtient que $u(1) = 0$ et donc $C = 0$.
Finalement $\boxed{u : x \mapsto -\ln(x)}$

3) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres. Notons pour cette question

$$\alpha : (r,t) \mapsto e^{-xre^{-it}}$$

où α est définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

i) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \alpha(r,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

ii) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \alpha(r,t)$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car elle est continue sur un segment.

iii) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $r \mapsto \alpha(r,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{\partial \alpha}{\partial x}(r,t) = -xe^{-it}e^{-xre^{-it}}$$

De plus la fonction $(r,t) \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r,t)$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

$\alpha)$ Pour tout $r \in \mathbb{R}_+0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\beta)$ Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $r \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\gamma)$ Domination :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \left|-xe^{-it}e^{-xre^{-it}}\right| \leqslant xe^{-xr\cos(t)} \leqslant x$$

De plus $t \mapsto x$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que $r \mapsto \varphi(x,r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et pour $r \in [0, +\infty[$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x,r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}e^{-xre^{-it}}dt$$

Pour $r \neq 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}e^{-xre^{-it}}dt = \left[-\frac{1}{ir}e^{-xre^{-it}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{ir}\left(e^{-xr} - e^{xri}\right)$$

et pour $r = 0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x,r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}dt = \left[\frac{x}{i}e^{-it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{x}{i}(-i-1)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $A : r \mapsto U(x,r) - V(x,r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$A'(r) = \frac{\partial U}{\partial r}(x,r) - \frac{\partial V}{\partial r}(x,r) = \begin{cases} \dfrac{e^{-rx} - e^{-r} - e^{irx} + e^{ir}}{r} & \text{si } r \neq 0 \\ 1 - x - i(x-1) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $B : r \mapsto i\varphi(x,r) - i\varphi(1,r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$B'(r) = i\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x,r) - i\frac{\partial \varphi}{\partial r}(1,r) = \begin{cases} \dfrac{e^{-rx} - e^{xri} - e^{-r} + e^{ri}}{r} & \text{si } r \neq 0 \\ \dfrac{x}{i}(-i-1) - \dfrac{1}{i}(-i-1) = 1 - x - i(x-1) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Cela montre que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ que $A'(r) = B'(r)$. De plus, pour $r = 0$,

$$A(0) = U(x,0) - V(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad B(0) = i\varphi(x,0) - i\varphi(1,0) = i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} = 0$$

On en déduit que pour tout $(x,r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$U(x,r) - V(x,r) = i\varphi(x,r) - i\varphi(1,r)$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$|\varphi(x,r)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| e^{-xre^{-it}} \right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt$$

En appliquant la version continue du théorème de convergence dominée montrons que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt = 0$$

On pose pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta(r,t) = e^{-xr\cos t}$.

i) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \beta(r,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

ii) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{r\to+\infty} e^{-xr\cos t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $\gamma : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

iii) Domination : Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|\beta(r,t)| \leqslant 1$. La fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma(t) dt = 0$$

Cela montre que $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi(x,r) = 0$

d) Soit $x > 0$. En utilisant la question 3.b) on obtient que pour $r \in \mathbb{R}_+$,

$$V(x,r) = U(x,r) - i\varphi(x,r) + i\varphi(1,r)$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient que l'intégrale $v(x)$ converge et que

$$v(x) = \lim_{r\to+\infty} V(x,r) = \lim_{r\to+\infty} U(x,r) = u(x) = -\ln(x)$$

Exercice II

1)

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) = f(0)x + f'(0)\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction de limite nulle en 0.

2) Pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(h, y+k) &= \frac{1}{h}(F(h.(y+k)) - F(h)) \\ &= \frac{1}{h}\Big(f(0)h(y+k) + f'(0)\frac{h^2(y+k)^2}{2} + h^2(y+k)^2\epsilon(h(y+k)) - f(0)h - f'(0)\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2}\epsilon(h)\Big) \\ &= f(0)(y+k) + f'(0)\frac{h(y+k)^2}{2} + h(y+k)^2\epsilon(h(y+k)) - f(0) - f'(0)\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\epsilon(h) \\ &= f(0)(y-1) + \varphi(h,k) + ||(h,k)||\mu(h,k) \end{aligned}$$

avec

$$\varphi(h,k) = \frac{f'(0)(y^2-1)}{2}h + f(0)k$$

et

$$\mu(h,k) = \frac{h}{||(h,k)||}\left(f'(0)\frac{2yk+k^2}{2} + (y+k)^2\epsilon(h(y+k)) - \frac{1}{2}\epsilon(h)\right)$$

φ est linéaire et μ tend vers 0 en $(0,0)$ car :

$(h,k) \mapsto \frac{h}{||(h,k)||}$ est bornée (par exemple prendre $||.|| = ||.||_\infty$ et encadrer $\frac{h}{||(h,k)||}$ par -1 et 1).

$h \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$ et $k \underset{(h,k)\to(0,0)}{\to} 0$.

3) Prolongeant G en $\tilde{G}$ par $(0,y) \mapsto f(0)(y-1)$ pour tout réel y et μ en $\tilde{\mu}$ par $(0,k) \mapsto 0$ pour tout réel k, la fonction $\tilde{G}$ admet encore un développement limité d'ordre 1 en $(0,y)$ pour tout réel y (le même que celui de G, en remplaçant μ par $\tilde{\mu}$).

   De plus G est différentiable sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ "par opérations sur les fonctions différentiables". Donnons des arguments plus rigoureux (pas sûr que cela paie aux concours) :

   F est dérivable

   $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ dont différentiables (linéarité)

   $(x,y) \mapsto xy$ est différentiable (bilinéarité)

   $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   Ainsi $\tilde{G}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.