1) a) **Exemples :**

i) La fonction p est nulle et la fonction f constante et égale à 1 :

On veut résoudre l'équation $-u''(x) = 1$. Les solutions sont de la forme $u : x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$. On veut de plus $u(0) = u(1) = 0$ ce qui impose $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. L'unique solution est donc $\boxed{u : x \mapsto \frac{x-x^2}{2}}$.

ii) La fonction p est constante et égale à 1 ; la fonction f est la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ où α est un réel donné : On veut résoudre l'équation $-u''(x) + u(x) = e^{\alpha x}$. On résout d'abord l'équation homogène associée $\mathbf{E}_0$: $u''(x) - u(x) = 0$. L'équation caractéristique est $X^2 - 1 = 0$ dont les racines sont ± 1. On en déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ avec λ, μ dans $\mathbf{R}$.

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation $\mathbf{E}$.

— Si $\alpha^2 \neq 1$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$. On voit qu'en prenant $\lambda = \frac{1}{1-\alpha^2}$ on a bien une solution. Les solutions de $\mathbf{E}$ sont donc

$$S = \{x \mapsto \frac{1}{1-\alpha^2} e^{\alpha x} + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

On détermine alors λ, μ tels que u vérifie $u(0) = u(1) = 0$. On a le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha^2} + \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{1}{1-\alpha^2} e^{\alpha} + \lambda e + \mu e^{-1} = 0 \end{cases}$$

On résout pour trouver

$$\lambda = \frac{e^{-1} - e^{\alpha}}{2(1-\alpha^2)\mathrm{sh}(1)} \text{ et } \mu = \frac{e^{\alpha} - e}{2(1-\alpha^2)\mathrm{sh}(1)}.$$

— Si $\alpha^2 = 1$. On cherche une solution de la forme $u : x \mapsto \lambda x e^{\alpha x}$. En injectant dans l'équation on trouve que u vérifie $\mathbf{E}$ si et seulement si $-\lambda(\alpha^2 x + 2\alpha)e^{\alpha x} + \lambda x e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$. On en déduit que $\lambda = -\frac{1}{2\alpha} = -\frac{\alpha}{2}$.

Finalement, les solutions de $\mathbf{E}$ sont donc

$$S = \{x \mapsto -\frac{\alpha}{2} x e^{\alpha x} + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

On détermine alors λ, μ tels que u vérifie $u(0) = u(1) = 0$. On a le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\dfrac{\alpha}{2} e^{\alpha} + \lambda e + \mu e^{-1} = 0 \end{cases}$$

On résout pour trouver

$$\lambda = \frac{\alpha e^{\alpha}}{4\mathrm{sh}(1)} \text{ et } \mu = -\frac{\alpha e^{\alpha}}{4\mathrm{sh}(1)}.$$

b) **Unicité des solutions :**

i) Soit u une fonction solution de l'équation $\mathbf{E_0}$ vérifiant les conditions $\mathbf{C}$; Pour tout x de $[0,1]$, $u'(x)^2 + p(x)u(x)^2 = u'(x)^2 + u''(x)u(x) = (uu')'(x)$. On en déduit que

$$\int_0^1 u'(x)^2 + p(x)u(x)^2 dx = \int_0^1 (uu')'(x) dx = \left[uu'\right]_0^1 = u(1)u'(1) - u(0)u'(0) = 0.$$

Maintenant, la fonction $(u')^2 + pu^2$ est positive et continue. Comme son intégrale de 0 à 1 est nulle on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $u'(x)^2 + p(x)u(x)^2 = 0$. Cela implique $u'(x) = 0$ et donc que u est constante. Comme $u(0) = 0$ on a bien que u est la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle est solution de P_0.

Finalement $\boxed{\text{la seule solution du problème } P_0 \text{ est la solution nulle.}}$

ii) On se donne des fonctions p et f. Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème P, la fonction $u_1 - u_2$ vérifie le problème P_0 et, est donc la fonction nulle d'après la question précédente. On en déduit que le problème P admet au plus une solution.

c) **Existence d'une solution :**

i) Soit u_1 et u_2 des solutions de l'équation différentielle $\mathbf{E_0}$, soit g la fonction définie sur l'intervalle I par $g : x \mapsto u_1(0)u_2(x) - u_2(0)u_1(x)$. En particulier, g est une combinaison linéaire de u_1 et u_2 et donc vérifie $\mathbf{E}_0$ car c'est une équation différentielle linéaire homogène.

Maintenant, $g(0) = 0$ et donc, si g s'annule en 1 alors g est une solution du problème P_0. C'est donc la fonction nulle d'après 1.b.i).

On a donc montré que si $g(1) = 0$ alors u_1 et u_2 étaient colinéaires ou $u_1(0) = u_2(0) = 0$.

Mais dans ce dernier cas, le wronskien $W = u_1u_2' - u_1'u_2$ de (u_1, u_2) serait nul en zéro (donc en au moins un point), donc comme on est dans les hypothèses du théorème de Cauchy (équation résolue en y'' à coefficients continus), (u_1, u_2) serait encore liée.

Variante : l'application de l'ensemble des solutions de (E_0) vers $\mathbf{R}^2$ qui à tout u associe $(u(0), u'(0))$ étant un isomorphisme et les images $(0, u_1'(0))$ et $(0, u_2'(0))$ de u_1 et u_2 par cet isomorphisme étant colinéaires, u_1 et u_2 sont elles-mêmes colinéaires.

Réciproquement, si u_1 et u_2 sont colinéaires. On peut, quitte à échanger u_1 et u_2, supposer qu'il existe λ tel que $u_2 = \lambda u_1$. Alors

$$g(1) = u_1(0)u_2(1) - u_2(0)u_1(1) = \lambda u_1(0)u_1(1) - \lambda u_1(0)u_1(1) = 0.$$

On a donc $\boxed{g(1) = 0 \text{ si et seulement si } u_1 \text{ et } u_2 \text{ colinéaires.}}$

ii) D'après la structure d'espace affine de l'ensemble des solutions de $\mathbf{E}$, on sait que u vérifie $\mathbf{E}$. Il reste à vérifier les conditions $\mathbf{C}$. Or $u(0) = 0 \iff \lambda u_1(0) + \mu u_2(0) + v(0) = 0$ et $u(1) = 0 \iff \lambda u_1(1) + \mu u_2(1) + v() = 0$. On pose donc

$$U = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v(1) \end{pmatrix}$$

On a alors u vérifie $\mathbf{C}$ si et seulement si $U.X = B$.

iii) En utilisant la question 1.c.i) on voit que si on prend u_1 et u_2 non colinéaires, alors $\det U = g(1) \neq 0$. Le système est inversible donc il existe un unique X tel que $U.X = B$. On en déduit qu'il existe une fonction qui vérifie le problème P. Cette solution est unique d'après 1.b)