Partie I - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est donc également un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie (n^2), $\mathbb{C}[A]$ est également de dimension finie (plus précisément, sa dimension est égal au degré du polynôme minimal de A). Donc $\boxed{\mathbb{C}[A] \text{ est fermé}}$.

   Soit $B \in C[A]$. Il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.

   $$\exp(B) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

   avec

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^k \right)(A) \in \mathbb{C}[A]$$

   Par caractérisation séquentielle des fermés, $\exp(B) \in \mathbb{C}[A]$.

   Donc $\boxed{\mathbb{C}[A] \text{ est stable par } \exp}$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

   • Supposons que P est premier avec π_A où π_A désigne le polynôme minimal de A. Par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que

   $$1 = UP + V\pi_A$$

   On a donc :

   $$I_n = 1(A) = U(A)P(A) + V(A)\pi_A(A) = U(A)P(A) + 0_n = P(A)U(A)$$

   Donc $P(A)$ est inversible d'inverse $U(A)$.

   • Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons que P n'est pas premier avec π_A. Soit Δ le pgcd de P et π_A et soient $Q = \frac{P}{\Delta}$ et $S = \frac{\pi_A}{\Delta}$.

   $\Delta(A)$ n'est pas inversible car sinon, notant 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $0_n = \Delta(A)S(A)$, on aurait $S(A) = 0$ avec $-\infty < deg(S) < deg(\pi_A)$, ce qui est contradictoire.

   Comme $P(A) = Q(A)\Delta(A)$ et que $\Delta(A)$ n'est pas injective, $P(A)$ ne l'est pas non plus donc n'est pas inversible.

3) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$.

   Comme $B \in \mathbb{C}[A]$, il existe un polynôme P tel que $B = P(A)$. D'après la question précédente, P est premier avec π_A.

   Dans les notations précédentes, $\boxed{B^{-1} = U(A) \in \mathbb{C}[A]}$.

On pose $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$.

4) a) G est non vide car il contient $I_n = 1(A)$.

   Soient $B, C \in G$. Alors $B^{-1}C$ est inversible, et c'est le produit de deux polynômes en A (car B^{-1} est un polynôme en A par la question précédente. Donc $B^{-1}C$ est un polynôme en A. Donc $B^{-1}C \in G$.

   Donc $\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times)}$.

   b) H est non vide car il contient $I_n = \exp(0_n)$.

   H est inclus dans G car pour toute matrice $C \in H$, il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ telle que $C = \exp(B)$ donc C est inversible d'inverse $\exp(-B)$, et comme $-B \in \mathbb{C}[A]$, on a $C^{-1} \in H$.

Soit $C' \in H$ et $B' \in \mathbb{C}[A]$ telle que $C' = \exp(B')$.
Dans les notations précédentes,

$$C^{-1}C' = \exp(-B)\exp(B') = \exp(-B+B')$$

car $-B$ et B' commutent car ce sont deux polynômes en A.
De plus, $-B+B'$ est un polynôme en A.
Donc $C^{-1}C' \in H$.
Donc $\boxed{H \text{ est un sous-groupe de } (G,\times)}$.

On admet que H est un ouvert relatif de G.

5) Soit $B \in \complement_G H$. Alors $B = BI_n \in BH \subset \bigcup\limits_{M \in G\setminus H} MH$.

Réciproquement, soit $B \in \bigcup\limits_{M\in G\setminus H} MH$. Il existe alors $M \in G \setminus H$ telle que $B \in MH$. Il existe donc $C \in H$ tellet que $B = MC$.
Comme $BC^{-1} = M \notin H$, comme $C \in H$ et comme H est un sous-groupe de G, B ne peut appartenir à H. De plus B appartient à G car G est stable par multiplication.
Donc $B \in \complement_G H$
Ainsi $\boxed{\complement_G H = \bigcup\limits_{M\in G\setminus H} MH}$.
Soit $M \in G \setminus H$.

$$MH = f^{-1}(H)$$

où $f : G \to G,\ C \mapsto M^{-1}C$.
f est continue par continuité du produit matriciel, et H est un ouvert relatif de G, donc $f^{-1}(H)$ est un ouvert relatif de G.
Ainsi $\bigcup\limits_{M\in G\setminus H} MH$ est réunion d'ouverts relatifs de G, donc est un ouvert relatif de G.
Donc $\boxed{H \text{ est un fermé relatif de } G}$.

6) a) Soient M et N dans G. Soit P le polynôme $\det\Big((1-X)M + XN\Big) \in \mathbb{C}[X]$. Comme $\tilde{P}(0) = \det(M) \neq 0$, P n'est pas le polynôme nul et a donc un nombre fini de racines.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble } \{z \in \mathbb{C}\ ,\ (1-z)M + zN \text{ non inversible}\} \text{ est fini}}$.

b) Soient M et N dans G. Soient $z_1, \dots, z_p$ les racines du polynôme P défini dans la question précédente. Remarquons que ni 0, ni 1 ne sont racines de P car $\det(M)$ et $\det(N)$ sont non nuls.
Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ une application continue ne prenant aucune des valeurs $z_1, \dots, z_p$. Un tel chemin peut par exemple être construit à l'aide de deux segments de droite :
-parmi les droites passant par 0, on peut en choisir une ne passant par aucun des points $z_1, \dots, z_p$ (il suffit pour cela que l'angle orienté que fait cette droite avec l'axe réel ait une mesure θ qui ne soit congrue modulo π à aucun des arguments de $z_1, \dots, z_p$)
-puis parmi les droites passant par 1, on peut en choisir une non parallèle à la précédente et ne passant par aucun des points $z_1, \dots, z_p$ (il suffit pour cela que l'angle orienté que fait cette droite avec l'axe réel ait une mesure qui ne soit congrue modulo π ni à θ ni à aucun des arguments de $z_1 - 1, \dots, z_p - 1$)
-les deux droites ainsi construites se coupent en un point z et il suffit de définir γ par $\gamma(t) = 2tz$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma(t) = z + 2(t - \frac{1}{2})(1-z)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.
L'application $t \in [0,1] \mapsto (1-\gamma(t))M + \gamma(t)N$ est alors un chemin continu à valeurs dans G de M vers N (elle ne prend que des valeurs inversibles et à termes dans $\mathbb{C}[A]$ car $\mathbb{C}[A]$ est stable par combinaisons linéaires)
Donc $\boxed{G \text{ est connexe par arcs}}$.

7) a) Soit $M \in H$ et $N \in G$. Soit $\gamma : [0,1] \to G$ un chemin continu de M à N et soit $t_0 = \sup X$ où $X = \{a \in [0,1],\ \gamma([0,a]) \subset H\}$

Soit $||.||$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme H est un ouvert relatif de G et comme $M \in H$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall M' \in G,\ ||M' - M|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow M' \in H$

Comme γ est continue et $\gamma(0) = M$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [0,\delta]\ ||\gamma(t) - M|| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi $\forall t \in [0,\delta]\ \gamma(t) \in H$.

Donc $t_0 \geqslant \delta > 0$.

Soit $t \in [0, t_0[$. t n'est pas un majorant de X car t_0 est le plus petit majorant de X. Donc il existe $a \in X$ tel que $a > t$. Comme $t \in [0,a]$, on a donc $\gamma(t) \in H$.

Comme H est un fermé relatif de G et comme γ est continue, on a

$$\gamma(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \gamma(t) \in H$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $t_0 \neq 1$. Par le même raisonnement que précédemment, il existe $\delta \in]0, 1 - t_0[$ tel que $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]\ \gamma(t) \in H$.

On a alors $t_0 + \delta \in X$, ce qui est contradictoire (car t_0 majore X).

Ainsi $t_0 = 1$, et comme $\gamma(t_0) \in H$, on a donc $\boxed{N \in H}$.

b) Fixons $M \in H$ (M existe car H est non vide, il contient I_n). Pour tout $N \in G$, il existe bien un chemin continu de M à N à valeurs dans G car G est connexe par arcs, donc $N \in H$ par la question précédente.

Ainsi $G \subset H$ donc $H = G$.

On a ainsi prouvé que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \ \exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

En particulier si A est une matrice $\boxed{\text{inversible}}$, alors $A = 1(A) \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ donc

$\boxed{A \text{ a un antécédent dans } \mathbb{C}[A] \text{ par } \exp}$.

Partie II - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

8) On suppose qu'il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \exp(M)$.

Posons $B = \exp(M/2)$. Alors $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et comme $M/2$ commute avec elle-même, $B^2 = \exp(2M/2) = A$. Donc $\boxed{A \text{ a une racine carrée dans } GL_n(\mathbb{R})}$.

9) Réciproquement, on suppose qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Par la première partie, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(P(B)) = B$

Comme B est à coefficients réels, $\bar{P}(B) = \overline{P(B)}$.

Ainsi $\exp(\bar{P}(B)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{P}(B))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\frac{(P(B))^k}{k!}} = \overline{\exp(P(B)} = \bar{B} = B$

Donc

$$A = BB = \exp(P(B))\exp(\bar{P}(B)) = \exp(P(B) + \bar{P}(B))$$

car $P(B)$ et $\bar{P}(B)$ commutent puisque ce sont deux polynômes en B.

Posant $Q = P + \bar{P}$, Q est à coefficients réels et $A = \exp(Q(B))$.

Donc

$$\boxed{A \in \exp(\mathbb{R}[B]) \subset \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}$$