Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathsf{E}(X)$ l'espérance de X.
Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

Partie I :
Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α. Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.
2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathsf{E}(e^{\alpha X})$ dans ce cas.
   a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.
   c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

Dans les deux dernières parties on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p,\ p \in \mathbb{N}\}$ où les x_p sont deux à deux distincts, et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Partie II :
Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans cette partie II, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

3) a) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = te^{-\gamma t}$ où γ est un réel strictement positif, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
4) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X.
5) Majorer $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

6) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathsf{E}(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$. *On pourra utiliser la série de fonctions* $\sum_{p\geqslant 0} g_p$ *où* $g_p : t \mapsto e^{tx_p}P(X = x_p)$.

7) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon \quad \begin{array}{ccc} [-\alpha, \alpha] & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & e^{-(m+\varepsilon)t}\Psi(t) \end{array}$$

8) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.

9) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

10) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $\big(\Psi(t)\big)^n$.

11) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
Montrer que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geqslant \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)$, puis que
$P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) \leqslant \big(f_\varepsilon(t)\big)^n$.

12) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) \leqslant r^n$.

13) Montrer $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = O(k^n)$ où $k \in [0, 1[$. Comparer au résultat de la question 5.

Partie III : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathsf{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leqslant c$.

14) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

Les fonctions Ψ et f_ε de la partie II sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

15) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}$.
   a) Vérifier que $X = -cY + (1 - Y)c$.
   b) Montrer que la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que $e^X \leqslant Ye^{-c} + (1 - Y)e^c$.
   d) Montrer que $\mathsf{E}(e^X) \leqslant \operatorname{ch}(c)$.

16) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\Psi(t) \leqslant \operatorname{ch}(ct)$.

17) a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

c) Montrer alors que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_\varepsilon(t) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \dfrac{1}{2}c^2t^2\right)$.

18) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

19) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0,1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p).

À l'aide de la question précédente, majorer $P\left(\left|\dfrac{Z}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε.