Partie I : Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

1) Comme $0 \leqslant e^{\alpha X} \leqslant e^{\alpha|X|}$ (par croissance de exp) on a dans $[0,+\infty]$:

$$E(e^{\alpha X}) \leqslant E(e^{\alpha|X|}) < +\infty$$

par croissance de l'espérance pour les variables à valeurs dans $[0,+\infty]$.

Ainsi $\boxed{\text{La variable } e^{\alpha X} \text{ admet une espérance finie}}$

Variante avec familles sommables :

soit $x \in X(\Omega)$, $e^{\alpha x} \leqslant e^{\alpha|x|}$. Or, comme X admet un moment exponentiel d'ordre α, la famille $(e^{\alpha|x|}P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et donc la famille $(e^{\alpha x}P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ aussi. De ce fait, d'après le théorème de transfert, la variable $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie

2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathsf{E}(e^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On remarque pour commencer que X ne prend que des valeurs positive, on a donc $e^{\alpha X} = e^{\alpha|X|}$.

En travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car tous les termes sont positifs, on a d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(e^{\alpha X}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k}P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha}\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^{\alpha}} < +\infty\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\alpha > 0$, la variable X admet un moment exponentielle d'ordre α et que $\boxed{\mathsf{E}(e^{\alpha X}) = \exp(\lambda(e^{\alpha}-1))}$.

b) On suppose que Y suit la loi géométrique de paramètre p, où p est un réel strictement compris entre 0 et 1. On remarque pour commencer que Y ne prend que des valeurs positive, on a donc $e^{\alpha Y} = e^{\alpha|Y|}$.

En travaillant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ car tous les termes sont positifs, on a d'après le théorème de transfert et en notant $q = 1-p$,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(e^{\alpha Y}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha k}P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha k}pq^{k-1} \\ &= pe^{\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}(qe^{\alpha})^k\end{aligned}$$

On en déduit que la variable aléatoire Y admet un moment exponentielle d'ordre α si et seulement si $qe^\alpha < 1$ c'est à dire si et seulement si $\boxed{\alpha < -\ln q}$.

Dans ce cas, $\boxed{\mathsf{E}(e^{\alpha Y}) = \dfrac{pe^\alpha}{1 - qe^\alpha}}$.

c) On suppose que Z suit la loi binomiale de paramètre n et p, où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1. Comme $Z(\Omega)$ est fini, la variable $e^{\alpha|Z|}$ est d'espérance finie et donc Z admet un moment exponentiel d'ordre α, pour tout $\alpha > 0$. De plus, en notant $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(e^{\alpha Z}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha k} P(Y = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^\alpha)^k q^{n-k}.
\end{aligned}$$

On en déduit, d'après le binôme de Newton, que $\boxed{\mathsf{E}(e^\alpha Z) = (pe^\alpha + q)^n}$.

Partie II : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$

3) a) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en $+\infty$.

Comme f admet une limite finie en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$, donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit bornée sur $]M, +\infty[$.

Comme f est continue sur le segment (compact) $[0, M]$, elle y est bornée.

Donc $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$ (car toute fonction bornée sur un nombre fini d'ensembles l'est sur leur réunion).

b) g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et a pour limite zéro à l'infini (limite usuelle). Par la question précédente, $\boxed{g \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$.

On pouvait aussi étudier les variations de g par dérivation (g est positive et maximale en $1/\gamma$ où elle vaut $\frac{1}{\gamma e}$)

4) D'après la question précédente, la fonction $t \mapsto te^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc il existe une constante positive M telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ |te^{-\alpha t}| \leqslant M$$

On a donc $|X| \leqslant Me^{\alpha|X|}$.

Or une variable aléatoire majorée en valeur absolue par une variable aléatoire d'espérance finie est d'espérance finie (en calculant a priori dans $[0, +\infty]$) on a par croissance de l'espérance $E(|X_1|) \leqslant E(M.e^{\alpha|X_1|}) < +\infty$), donc $\boxed{X \text{ est d'espérance finie}}$.

5) Par la question 3)b), la fonction $t \mapsto te^{-\alpha t/2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc majorée en valeur absolue sur cet intervalle par une constante K, et on a donc pour tout t réel, $t^2 = |t|^2 \leqslant (Ke^{\alpha|t|/2})^2 = K^2 e^{\alpha|t|}$. Ainsi $E(X^2) \leqslant E(K^2 e^{\alpha|X|}) < +\infty$. Donc $\boxed{S_n \text{ a un moment d'ordre 2}}$ comme combinaison linéaire de variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2.

De plus, les X_i étant mutuellement indépendantes donc deux à deux indépendantes, $V(S_n) = nV(X_1)$. On a donc $V(\frac{S_n}{n}) = \frac{nV(X_1)}{n^2} = \frac{V(X_1)}{n}$. De plus, $E(S_n/n) = nE(X_1)/n = m$.
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}}$$

6) Pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{\alpha|X|}$ donc (en majorant a priori dans $[0, +\infty]$), $E(e^{tX}) \leqslant E(e^{\alpha|X|}) < +\infty$, et ainsi Ψ est définie en t.
Par transfert, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$,

$$\Psi(t) = \sum_{p\in\mathbb{N}} e^{tx_p} P(X = x_p) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{tx_p} P(X = x_p)$$

(sous-entendu : la famille est sommable et la série converge absolument) Pour tout naturel p, notons $g_p : t \mapsto e^{tx_p} P(X = x_p)$. Chacune de ces fonctions est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ et $||g_p||_{\infty,[-\alpha,\alpha]} = e^{\alpha|x_p|} P(X = x_p)$.
Par le théorème de transfert, comme $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, la famille $(||g_p||_{\infty,[-\alpha,\alpha]})_{p\in\mathbb{N}}$ est sommable donc la série $\sum_{p\geqslant 0} ||g_p||_{\infty,[-\alpha,\alpha]}$ converge absolument donc converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 0} g_p$ converge <u>normalement</u>, donc uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$.
Donc $\boxed{\Psi \text{ est continue sur } [-\alpha, \alpha]}$.

7) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction g_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ avec pour dérivée $g_p' : t \mapsto x_p e^{tx_p} P(X = x_p)$.
Soit $\beta \in [0, \alpha[$. On a

$$||g_p'||_{\infty,[-\beta,\beta]} = |x_p| e^{\beta|x_p|} P(X = x_p).$$

Or par la question 3)b), la fonction $x \mapsto xe^{(\beta-\alpha)x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc majorée en valeur absolue par une constante M.
Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$||g_p'||_{\infty,[-\beta,\beta]} \leqslant Me^{(\alpha-\beta)|x_p|} e^{\beta|x_p|} P(X = x_p) = Me^{\alpha|x_p|} P(X = x_p)$$

Donc par transfert, $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||g_p'||_{\infty,[-\beta,\beta]} \leqslant E(Me^{\alpha|X|}) < +\infty$, et ainsi $\sum_{p\geqslant 0} ||g_p'||_{\infty,[-\beta,\beta]}$ converge absolument donc converge.
La <u>série des dérivées</u> $\sum_{p\geqslant 0} g_p'$ converge donc <u>normalement</u>, donc uniformément, <u>sur tout segment</u> de $]-\alpha, \alpha[$ (car tout segment J de cet intervalle est inclus dans un segment de la forme $[-\beta, \beta]$ en posant $\beta = \max_{t\in J} |t| < \alpha$, la fonction continue valeur absolue ayant un maximum sur le segment J).
Ainsi $\boxed{\Psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$.
De plus pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$,

$$\Psi'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p e^{tx_p} P(X = x_p) = \boxed{E(Xe^{tX})}$$

(par transfert et sommabilité de la famille $(x_p e^{tx_p} P(X = x_p)_{p\in\mathbb{N}})$

8) $f_\varepsilon(0) = 1.E(1) = \boxed{1}$
$f_\varepsilon'(0) = -(m + \varepsilon)E(1) + 1.E(X.1) = -(m + \varepsilon) + m = \boxed{-\varepsilon}$.

9) Par la question précédente, on a $f_\varepsilon(t) = 1 - \varepsilon t + o_{t\to 0}(t)$.

$f_\varepsilon(t) - 1 \underset{t\to 0^+}{\sim} -\varepsilon t$, donc $f(t)-1$ est, au sens strict, de même signe que $-\varepsilon t$ pour t suffisamment proche de 0.

De plus f est, pour t suffisamment proche de 0, du signe de sa limite non nulle 1 en 0, ceci au sens strict.

Ainsi $\boxed{\text{il existe } t_0 \in]0,\alpha[\text{ tel que } 0 < f(t_0) < 1}$.

10) e^{tS_n} est produit de e^{tX_1}, ..., e^{tX_n} qui sont mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions, et qui sont d'espérances finies.

Ainsi e^{tS_n} est d'espérance finie égale à

$$\boxed{E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1})\dots E(e^{tX_n}) = (\Psi(t))^n}$$

11) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0,\alpha]$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{S_n(\omega)}{n} \geqslant m+\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad tS_n(\omega) \geqslant t(m+\varepsilon)n \text{ car } t>0 \text{ et } n>0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{tS_n(\omega)} \geqslant e^{t(m+\varepsilon)n} \text{ par croissance des fonctions exponentielle et logarithme} \end{aligned}$$

Ainsi les événements $\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right)$ et $\left(e^{tS_n} \geqslant \left(e^{t(m+\varepsilon)}\right)^n\right)$ sont égaux donc ont même probabilité.

Par l'inégalité de Markov et positivité de la variable aléatoire e^{tS_n}, on a

$$P\left(e^{tS_n} \geqslant (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right) \leqslant \frac{E(e^{tS_n})}{(e^{t(m+\varepsilon)})^n} = \frac{\Psi(t))^n}{(e^{t(m+\varepsilon)})^n} = \boxed{(f_\varepsilon(t))^n}$$

12) Prenant t_0 comme à la question 7) et posant $r = f_\varepsilon(t_0)$, on a $0 < r < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) \leqslant r^n}$.

13) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\varepsilon\right) + P\left(\frac{-S_n}{n} \geqslant -m+\varepsilon\right)$$

(par union disjointe)

Or, posant pour tout naturel n, $Y_n = -X_n$, la suite (Y_n) vérifie les mêmes hypothèses que la suite (X_n) sauf que leur espérance commune est $-m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $Y_1 + \ldots + Y_n = -S_n$.

Ainsi, par ce qui précède, il existe un réel $s \in]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\frac{-S_n}{n} \geqslant -m+\varepsilon\right) \leqslant s^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2k^n = O(k^n)$$

avec $k = \max(r,s) \in]0,1[$.

Donc

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = O(k^n)}$$

Or $k^n = o(\frac{V(X)}{n\varepsilon^2})$ (sauf si $V(X)$ est nul, ce qui revient à dire que chacune des variables aléatoires X_n est presque sûrement constante). La majoration que nous venons d'obtenir est donc <u>asymptotiquement infiniment meilleure</u> (sauf dans le cas trivial) que celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Partie III :
Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$

14) Soit $\alpha > 0$.
Comme $0 \leqslant e^{\alpha|X|} \leqslant e^{\alpha c}\,\mathbb{1}_\Omega$ on a dans $[0,+\infty]$, par croissance de l'espérance pour les variables positives :

$$\mathsf{E}(e^{\alpha|X|}) \leqslant E(e^{\alpha c}\,\mathbb{1}_\Omega) = e^{\alpha c}E(\mathbb{1}_\Omega) = e^{\alpha c} < +\infty$$

On en déduit que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

15) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}$.

a) On fait le calcul

$$-cY + (1-Y)c = -c\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{2c}\right) + c\left(\frac{1}{2} + \frac{X}{2c}\right) = X.$$

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout réel x sa dérivée seconde est $x \mapsto e^x$ qui est à valeurs positives. On en déduit que $x \mapsto e^x$ est convexe.

c) Soit $\omega \in \Omega$,

$$e^{X(\omega)} = \exp\left(-cY(\omega) + (1-Y(\omega))c\right) \leqslant Y(\omega)e^{-c} + (1-Y(\omega))e^c$$

L'inégalité venant de la question précédente et du fait que $Y(\omega) \in [0,1]$ car $X(\omega) \in [-c,c]$.
En effet pour tout $t \in [0,1]$, $\exp(t \times (-x) + (1-t) \times c) \leqslant te^{-c} + (1-t)e^c$.
On a bien montré que $\boxed{e^X \leqslant Ye^{-c} + (1-Y)e^c.}$

d) Par croissance de l'espérance, puis la linéarité de cette dernière, on obtient que

$$\mathsf{E}(e^X) \leqslant \mathsf{E}(Ye^{-c} + (1-Y)e^c) \leqslant e^{-c}\mathsf{E}(Y) + e^c\mathsf{E}(1-Y) = e^{-c}\mathsf{E}(Y) + e^c(1-\mathsf{E}(Y)).$$

Maintenant, toujours par linéarité de l'espérance, $\mathsf{E}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c}\mathsf{E}(X) = \frac{1}{2}$ car $\mathsf{E}(X) = 0$.
On en déduit bien que $\boxed{\mathsf{E}(e^X) \leqslant \mathrm{ch}(c)}$.

16) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, la variable aléatoire $Z_t = tX$ vérifie que $\mathsf{E}(Z_t) = 0$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $|Z_t(\omega)| \leqslant ct$. En appliquant ce qui précède, on obtient que $\boxed{\Psi(t) = \mathsf{E}(e^{Z_t}) \leqslant \mathrm{ch}(ct)}$.

17) a) D'après le cours la fonction ch est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (donc son rayon de convergence vaut $+\infty$) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

On sait de même la fonction $t \mapsto e^t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (donc son rayon de convergence vaut $+\infty$) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

La série ci-dessus a donc encore un rayon de convergence égal à $+\infty$.

b) Montrons, par récurrence sur k que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant v_k$ où $u_k = (2k)!$ et $v_k = 2^k k!$.

— Pour $k = 0$, $u_0 = 1 = v_0$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_k \leqslant v_k$, on a alors

$$u_{k+1} = (2k+2)! = (2k+2)(2k+1)u_k \geqslant (2k+2)u_k \geqslant 2(k+1)v_k = v_{k+1}.$$

Par récurrence, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant v_k$. De ce fait, pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $t^{2k} = (t^2)^k \geqslant 0$, $\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{t^{2k}}{2^k k!}$ et donc, en sommant ces termes,

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on utilise les questions 16 et 17.c et le fait que $m = \mathsf{E}(X) = 0$ pour obtenir,

$$f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t}\Psi(t) \leqslant e^{-\varepsilon t}\mathrm{ch}(ct) \leqslant e^{-\varepsilon t}\exp\left(\frac{c^2t^2}{2}\right) = \exp\left(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2\right).$$

18) D'après la question 11, on sait que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant (f_\varepsilon(t))^n \leqslant \exp\left(-nt\varepsilon + \frac{n}{2}c^2t^2\right).$$

Cherchons alors la valeur de t qui permet d'avoir l'inégalité optimale. Pour cela on cherche le minimum de la fonction $\theta : t \mapsto -t\varepsilon + \frac{c^2t^2}{2}$. Elle est dérivable et $\theta' : t \mapsto -\varepsilon + c^2 t$. Son minimum est donc atteint en $\frac{\varepsilon}{c^2}$. En remplaçant, on obtient que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{c^2} + \frac{nc^2\varepsilon^2}{2c^4}\right) = \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right).$$

On peut faire le même raisonnement en remplaçant les variables $Y_k = -X_k$. On obtient que $P\left(-\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$. En utilisant que $\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \cup \left(-\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right)$, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

19) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0,1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p).

On considère des variables Y_k mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1,p)$. On a $\mathsf{E}(Y_k) = p$ et on pose $X_k = Y_k - p$ de telle sorte que $\mathsf{E}(X_k) = 0$. On a de plus $Z - np = \sum_{k=1}^n (Y_k - p) = \sum_{k=1}^n X_k = S_n$. De ce fait, $\frac{Z}{n} - p = \frac{S_n}{p}$.

Les variables X_k sont encore mutuellement indépendantes et $X_k(\Omega) = \{1-p, -p\}$. On pose $c = \max(1-p, p)$. On peut alors utiliser ce qui précède,

$$P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right|\right) \leqslant 2\exp\left(-n\frac{\varepsilon}{2c^2}\right).$$