1) Soit $x \in]-1,1[$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$, donc $1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum a_n x^n$ converge absolument et par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ converge absolument.
Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2}\frac{2^n}{1-2^n}$ converge car $\frac{1}{(n+1)^2}\frac{2^n}{1-2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2) Soit $b \in [0,1[$ et $x \in [-b,b]$. Pour tout entier strictement positif n, $x^n \leqslant |x|^n \leqslant b^n$. On en déduit que $0 \leqslant 1 - b^n \leqslant 1 - x^n$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x^n} \leqslant \frac{1}{1-b^n}$$

Si on pose $f_n : x \mapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ alors

$$||f_n||_{\infty,[-b,b]} \leqslant |a_n| \frac{b^n}{1-b^n}$$

En utilisant la question ci-dessus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,[-b,b]}$ converge (par comparaison pour les séries à termes positifs). Cela signifie que la suite de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

3) On note encore $f_n : x \mapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$. On applique le théorème de continuité des séries de fonctions :
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue sur $]-1,1[$
   - la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b,b] \subset]-1,1[$ d'après la question précédente.

   On en déduit que la fonction f est continue sur $]-1,1[$.
   Appliquons maintenant le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions.
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$
   - la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_n' : x \mapsto a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$
     Il reste à montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$.
     Soit $b \in [0,1[$, alors par le même raisonnement fait à la question 2)

$$\forall x \in [-b,b],\ \ |f_n'(x)| \leqslant \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

     Cela implique que

$$||f_n'||_{\infty,[-b,b]} \leqslant \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

     Comme à la question 1)

$$\frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$$

De plus, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est égal à celui de $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n|a_n|b^{n-1}$ converge (car $b\in[0,1[$). On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge (comparaison pour les séries à termes positifs) et finalement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n'||_{\infty,[-b,b]}$ converge.

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-b,b]\subset\,]-1,1[$

Cela montre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall x\in]-1,1[, f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

En particulier, $f'(0)=a_1$.

4) - Pour la première partie, d'après le théorème de sommation par paquets, il suffit de montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.
Il est évident que chaque $I_n\subset A$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\subset A$.
Soit $(k,p)\in A$, il est clair que $(k,p)\in I_{kp}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n=A$.
Si on suppose que $\exists(k,p)\in I_n\bigcap I_m$, alors $kp=n=m$, donc $I_n=I_m$, donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.
La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n}^{+\infty} u_{k,p}\right)$$

- Soit $x\in]-1,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} a_n x^{np}$ converge absolument car la série $\sum_{p\geqslant 1}(x^n)^p$ est juste la série géométrique de raison x^n et que $|x^n|<1$.
De plus

$$\sum_{p=1}^{+\infty}|a_n||x|^{np}=|a_n|\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}|a_n|\frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge parla question 1), la famille donnée est sommable.
Sa somme vaut

$$\sum_{(n,p)\in A} a_n x^{np}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}$$

En appliquant ce qui précède à $u_{n,p}=a_n x^{np}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k\right)x^n$$

Maintenant, si on fixe $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble des couples (k,p) qui appartiennent à I_n sont les couples de la forme $(d,\frac{n}{d})$ où d est un diviseur (positif) de n. Cela implique que

$$\sum_{(k,p)\in I_n} a_k=\sum_{d|n} a_d=b_n$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

5) On pose pour tout entier n strictement positif $a_n = 1$. On commence par remarquer que l'on est bien dans le cadre étudié dans le problème car la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
Dans ce cas, le b_n de la question 4) est

$$b_n = \sum_{d|n} 1 = d_n$$

En appliquant les résultats de la question 4) on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

6) a) Soit k, a et b des entiers naturels. On a

$$(k(a \wedge b)\mathbb{Z}) = k(a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) = (ka)\mathbb{Z} + (kb)\mathbb{Z} = (ka \wedge kb)\mathbb{Z}$$

Par définition du PGCD, comme $k(a \wedge b)$ et $(ka) \wedge (kb)$ sont positifs, $k(a \wedge b) = (ka) \wedge (kb)$.

b) Par définition, $A_{\frac{n}{d}} \subset [\![1, \frac{n}{d}]\!]$ donc si $x \in A_{\frac{n}{d}}$, $dx \in [\![1, n]\!]$. On peut donc considérer θ l'application définie de $A_{\frac{n}{d}}$ dans $[\![1, n]\!]$ définie par $\theta : x \mapsto dx$. L'application est injective car, pour x, x' dans $A_{\frac{n}{d}}$, $dx = dx'$ implique $x = x'$. De plus, d'après la question précédente, si $x \in A_{\frac{n}{d}}$, $x \wedge \frac{n}{d} = 1$ et donc $dx \wedge n = d$. Cela montre que l'application θ est à valeurs dans $\{u \in [\![1, n]\!]\ ,\ u \wedge n = d\}$. Réciproquement pour $u \in [\![1, n]\!]$ tel que $u \wedge n = d$, u est divisible par d par définition. On pose $x \in [\![1, \frac{n}{d}]\!]$ tel que $u = dx$. Comme $dx \wedge d\frac{n}{d} = d$, on a $x \wedge \frac{n}{d} = 1$, c'est-à-dire, $x \in A_{\frac{n}{d}}$.
On a bien montré que $\theta : A_{\frac{n}{d}} \to \{u \in [\![1, n]\!]\ ,\ u \wedge n = d\}$ était une bijection.

c) Quand d décrit les diviseurs de n, les ensembles $\{u \in [\![1, n]\!]\ ,\ u \wedge n = d\}$ forment une partition de $[\![1, n]\!]$. On en déduit

$$n = \#[\![1, n]\!] = \sum_{d|n} \#\{u \in [\![1, n]\!]\ ,\ u \wedge n = d\} = \sum_{d|n} \#A_{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

La dernière égalité est obtenue en voyant que l'application $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs de n dans lui-même.

d) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \varphi(n)x^n$.
On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $\varphi(n) \geqslant 1$ (car $1 \in A_n$). Or la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc $R \leqslant 1$.
On sait aussi que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant n$. Or la série entière $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (car elle a le même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$) donc $R \geqslant 1$.
On obtient que $R = 1$.
Soit $x \in]-1, 1[$. On peut encore appliquer les résultats de la question 4). Cette fois, pour $n \geqslant 1$,

$$b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$$

Or $\forall x\in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$, en dérivant (on peut dériver terme à terme une série entière sur le disque ouvert de convergence) et en multipliant par x, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

Finalement

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

7) On rappelle que l'on a

$$\forall x\in[0,1[,\ -\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$$

On veut faire tendre x vers 1 dans les deux membres de cette formule. Pour cela on va appliquer le theorème de la double limite à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}g_n$ où $g_n : x\mapsto(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$.

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1^-}(-1)^n\frac{x^n}{n}=\frac{(-1)^n}{n}$
- montrons la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1}g_n$ au voisinage de 1.

  Attention : il faut montrer la convergence uniforme au voisinage de 1 c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a,1[$.
  Attention : La série de fonctions ne converge pas normalement car $||g_n||_{\infty,[0,1[}=\frac{1}{n}$.
  Pour $x\in[0,1[$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}g_n(x)$ relève du théorème des séries alternées car $(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$ est du signe de $(-1)^n$ et que $\dfrac{x^n}{n}$ décroit et tend vers 0. On peut donc utiliser la majoration du reste ;

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}\right|\leqslant\frac{x^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

  Donc $||R_n||_{\infty,[0,1[}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, donc la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ est uniforme,

Le théorème de la double limite s'applique et on a

$$-\ln 2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Remarque : On pouvait aussi employer le théorème d'Abel radial. Comme la série entière $\sum g_n$ converge en 1, sa fonction somme S est continue sur $[0,1]$. De plus la fonction $h : x\mapsto -\ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$.
On a donc $S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}h(x)=h(1)=-\ln(2)$.

8) Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,
$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$$
On pose donc pour $n \geqslant 1$, $h_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n}$.
On veut appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ pour déterminer sa limite en 0.

- On voit que
$$\lim_{x\to 0}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad n=1 \\ 0 & \text{si} \quad n\neq 1 \end{cases}$$
- Soit $a \in]0,1[$ (on peut prendre $a=\frac{1}{2}$ si on veut). Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [-a,a]$,
$$0 < 1-a^n \leqslant 1-x^n$$
Il en découle que
$$|h_n(x)| \leqslant \frac{x^{n-1}}{1-a^n}$$
et donc $||h_n||_{\infty,[-a,a]} \leqslant \dfrac{a^{n-1}}{1-a^n}$.
Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a^{n-1}}{1-a^n}$ converge car $\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{n-1}$ et la série $\sum a^{n-1}$ converge car $a \in]0,1[$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||h_n||_{\infty,[-a,a]}$ converge. Cela signifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a,a]$.

D'après le théorème de la double limite :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$
Un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$ est donc $-x$.
On a $f(0)=0$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0) = -1 = a_1$ c'est ce qu'on a trouvé à la question 3).

9) Toujours $a_n = (-1)^n$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$
Donc
$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$$
Pour $n \geqslant 1$, on pose $g_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.
On veut appliquer le théorème de la double limite pour calculer la limite quand x tend vers 1.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$,
- Soit $x \in [0,1[$, on veut montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n(x)$ relève du théorème des séries alternées.
On voit que $g_n(x)$ est du signe de $(-1)^n$. Si on pose $u_n(x) = |g_n(x)| = \dfrac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$, alors
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}+x^n} < 1$$
ce qui montre que la suite $(|g_n(x)|)$ décroit.

De plus, pour $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, on a $\quad x^{n-1} \leqslant x^k$ donc $nx^{n-1} \leqslant 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$,
Alors

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Ce qui montre que la suite $(|g_n(x)|)$ tend vers 0.
Comme dans la question (Q10) on peut majorer le reste de la série

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| \leqslant |g_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Cela signifie que $||R_n||_{\infty,[0,1[} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Alors la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $]0, 1[$.

Le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to 1^-} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

d'après la question 7)

Alors $(1-x)f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} -\ln 2$, qui s'écrit $f(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{(1-x)}$.