Partie I

1. Montrons que N_∞ est une norme :

   i) N_∞ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

   ii) $N_\infty(A) = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$. D'où $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!] : |a_{i,j}| = 0$ et donc $A = 0$.

   iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \leqslant |\lambda| N_\infty(A)$, donc $N_\infty(\lambda A) \leqslant |\lambda| N_\infty(A)$

   Si $\lambda \neq 0$, $N_\infty(A) = N_\infty\left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda A\right) \leqslant |\dfrac{1}{\lambda}| N_\infty(\lambda A)$, donc $|\lambda| N_\infty(A) \leqslant N_\infty(\lambda A)$, d'où l'égalité : $|\lambda| N_\infty(A) = N_\infty(\lambda A)$

   Si $\lambda = 0$, l'égalité est triviale.

   iv) $\forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$, donc $N_\infty(A + B) \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

   $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$

2. (a) Si $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $A(z) = (y_1, \cdots, y_n) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} z_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} z_j\right)$

   Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|y_i| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{i,j}|}_{\geqslant 0} \underbrace{|z_j|}_{\leqslant \|z\|_\infty} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \|z\|_\infty \leqslant N_\infty(A) \|z\|_\infty$.

   D'où $\boxed{\|A(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A) \|z\|_\infty}$.

   (b) • $\forall z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leqslant N_\infty(A)$ donc $N_\infty(A)$ majore l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{\dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} / z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}\right\}$.

   • Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $N_\infty(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$ et soit $z_0 = \left(e^{-i\theta_1}, \dots, e^{-i\theta_n}\right)$ tel que $\theta_j = 0$ si $a_{i_0,j} = 0$ et θ_j est un argument de $a_{i_0,j}$ si celui-ci est non nul : $a_{i_0,j} = |a_{i_0,j}| e^{i\theta_j}$

   On a alors : $|y_{i_0}| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\ e^{-i\theta_j}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = N_\infty(A)$.

   Ainsi $N_\infty(A) = |y_{i_0}| \leqslant \|A(z_0)\|_\infty$

   Comme $\|z_0\|_\infty = \max(1, \dots, 1) = 1$, on a donc : $N_\infty(A) \leqslant \dfrac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} \leqslant N_\infty(A)$. Cette dernière inégalité étant vraie car $\dfrac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty}$ est un élément de $\mathcal{A}$.

   $$\boxed{N_\infty(A) = \sup\left\{\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} / z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}\right\}}$$

   (c) Soit $\lambda_0 \in \mathsf{Sp}(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ (il existe car A possède un nombre fini de valeurs propres) et z_0 un vecteur propre (donc $z_0 \neq 0$) tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors

   $\dfrac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = \dfrac{\|\lambda_0 z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = \dfrac{|\lambda_0|\ \|z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty} = |\lambda_0| = \rho(A) \leqslant N_\infty(A)$.

   $\boxed{\rho(A) \leqslant N_\infty(A)}$.

3. Pour tout z non nul, $\|AB(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\|B(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)\ \|z\|_\infty$
   ainsi $\dfrac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$ et on obtient

$$N_\infty(AB) = \max_{z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{||AB(z)||_\infty}{||z||_\infty} \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B).$$

4. (a) *i)* La fonction N_Q est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

   ii) $N_Q(A) = 0$ implique $Q^{-1}AQ = 0$ ce qui implique que $A = Q0Q^{-1} = 0$

   iii) $N_Q(\lambda A) = N_\infty(Q^{-1}\lambda AQ) = |\lambda| N_Q(A)$

   iv) $N_Q(A+B) = N_\infty(Q^{-1}(A+B)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQ+Q^{-1}BQ) \leqslant N_\infty(Q^{-1}AQ)+N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A) + N_Q(B)$.

   On en déduit que N_Q est une norme.

   Enfin $N_Q(AB) = N_\infty(Q^{-1}(AB)Q) = N_\infty(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \leqslant N_\infty(Q^{-1}AQ)N_\infty(Q^{-1}BQ) = N_Q(A)N_Q(B)$

   $\boxed{N_Q \text{ est une norme matricielle}}$.

   (b) Comme N_∞ est une norme matricielle :

   $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ) \leqslant N_\infty(Q^{-1})N_\infty(A)N_\infty(Q) = C_Q\ N_\infty(A)$ avec

   $C_Q = N_\infty(Q^{-1})\ N_\infty(Q) > 0$ car Q est inversible, donc Q et Q^{-1} sont non nulles.

   Note : En fait, C_Q s'appelle le conditionnement de Q, c'est une notion importante qui intervient dans la résolution numérique des systèmes linéaires.

   De manière symétrique on a :

   $N_\infty(A) = N_\infty(Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1}) \leqslant N_\infty(Q)N_\infty(Q^{-1}AQ)N_\infty(Q^{-1}) = C_Q\ N_Q(A)$

   Finalement : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\dfrac{1}{C_Q}\ N_\infty(A) \leqslant N_Q(A) \leqslant C_Q\ N_\infty(A)$.

5. (a) On voit que $D_p^{-1} = D_q$ où $q = (p_1^{-1}, \ldots, p_n^{-1})$. Le calcul matriciel donne alors que si $A = (a_{ij})$ alors les coefficients b_{ij} de la matrice $D_p^{-1}AD_p$ sont donnés par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, b_{ij} = p_i^{-1}a_{ij}p_j$.

   (b) En notant $T = (t_{ij})$, on a facilement $D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$

   D'où $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max_{i\in[1,n]}\{|t_{ii}| + P_i(s)\}$ où $P_i(s) = \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}|s^{j-i}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui vérifie $P_i(0) = 0$.

   Comme une fonction polynôme est continue, donc continue en 0, pour cet ε strictement positif donné,

   pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $s_i > 0$ tel que , $\forall s \in]0, s_i]$, $|P_i(s)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   On pose $s_0 = \min\{s_1, \cdots, s_n\} > 0$, donc pout tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|t_{ii}| + P_i(s_0) \leqslant \rho(T) + \dfrac{\varepsilon}{2}$, car les valeurs propres de T sont les t_{ii} d'où on conclut :

$$\boxed{N_{D_S}(T) \leqslant \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2} < \rho(T) + \varepsilon}$$

(c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q tel que $A = QTQ^{-1}$. D'autre part il existe $s \in \mathbb{C}^n$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$.

Or $\rho(T) = \rho(A)$ et $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = N_\infty(D_S^{-1}Q^{-1}AQD_S) = N_{QD_S}(A)$. Posons donc $N_\varepsilon = N_{QD_S}$, on a alors $N_\varepsilon(A) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

$$\boxed{N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon}$$

6. On procède par double implication :

— $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\lambda_0 \in \mathsf{Sp}(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors pour tout entier k : $\|A^k(z_0)\|_\infty \leqslant N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. D'où $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leqslant N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ et donc $|\lambda_0|^k\|z_0\|_\infty \leqslant N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. On en déduit alors $0 \leqslant |\lambda_0|^k \leqslant N_\infty(A^k)$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, on a $\lim\limits_{k\to\infty} N_\infty(A^k) = 0$ et par théorème d'encadrement on obtient : $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_0|^k = 0$ ce qui n'est possible que si $|\lambda_0| < 1$, donc que $\rho(A) < 1$.

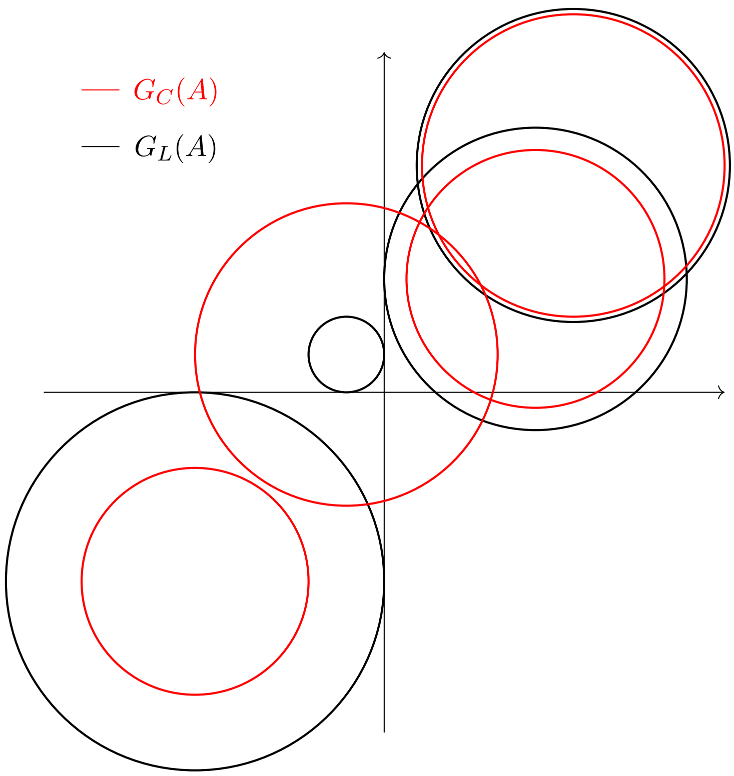
— $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$. On peut prendre par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(A)}{2}$. Posons enfin $q = \rho(A) + \varepsilon$, on a donc $0 < q < 1$. D'après la question précédente, il existe une norme matricielle N_ε telle que $N_\varepsilon(A) < q$. On a alors $0 \leqslant N_\varepsilon(A^k) \leqslant N_\varepsilon(A)^k \leqslant q^k$. On conclut alors par théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to\infty} N_\varepsilon(A^k) = 0$

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1}$

Partie II

7. On a $G_L(A) = D(4+3i, 4) \cup D(-1+i, 1) \cup D(5+6i, \sqrt{2}+3) \cup D(-5-5i, 5)$ et

$G_C(A) = D(4+3i, 2+\sqrt{2}) \cup D(-1+i, 4) \cup D(5+6i, 4) \cup D(-5-5i, 3)$



8. (a) $Z = (z_1, \dots, z_n)$ et on a les relations pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{ij} z_j = 0$, donc $m_{ii} z_i = -\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_{i,j} z_j$, d'où : $|m_{ii}||z_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{ij}||z_j| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{ij}| \|Z\|_\infty = L_i \|Z\|_\infty$.

On choisit $i = p$, un indice pour lequel $\|Z\|_\infty = |z_p| \neq 0$, on a donc :

$|m_{pp}|\|Z\|_\infty \leqslant L_p \|Z\|_\infty$. D'où : $\boxed{|m_{p,p}| \leqslant L_p}$

(b) Soit $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$, $M = A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc le système $(A - \lambda I_n)Z = 0$ admet une solution non nulle d'où il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $|m_{pp}| \leqslant L_p(M)$ (avec $L_p(M)$: la somme définie au début de II avec une matrice M). Comme $m_{pp} = a_{pp} - \lambda$ et que $L_p(M) = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}| = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} (|a_{ij} - 0|) = L_p(A) = L_p$, on a donc

$|a_{pp} - \lambda| \leqslant L_p$ ce qui veut dire $\lambda \in D_p(A) \subset G_L(A)$

On a bien $\boxed{\mathsf{Sp}(A) \subset G_L(A)}$

(c) Comme λ est valeur propre de A SSI λ est valeur propre de ${}^tA$, donc $\mathsf{Sp}(A) = \mathsf{Sp}({}^tA)$. D'autre part les sommes L_i de A correspondent exactement aux sommes C_i de ${}^tA$ et les sommes C_i de A correspondent exactement aux sommes L_i de ${}^tA$. On en déduit $\mathsf{Sp}(A) = \mathsf{Sp}({}^tA) \subset G_L({}^tA) = G_C(A)$, on conclut $\boxed{\mathsf{Sp}(A) \subset G_L(A) \cap G_C(A)}$

9. On trouve $D_p^{-1} A D_p = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{p_2}{p_1} a_{1,2} & \frac{p_3}{p_1} a_{1,3} & \dots & \frac{p_n}{p_1} a_{1,n} \\ \frac{p_1}{p_2} a_{2,1} & a_{2,2} & \frac{p_3}{p_2} a_{2,3} & \dots & \frac{p_n}{p_2} a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1}{p_n} a_{n,1} & \frac{p_2}{p_n} a_{n,2} & \dots & \frac{p_{n-1}}{p_n} a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$

On en déduit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$ et donc

$$D_i(D_p^{-1} A D_p) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ , \ |z - a_{i,i}| \leqslant L_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i} \right\} \text{ et } G_L(D_p^{-1} A D_p) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(D_p^{-1} A D_p).$$

10. (a) Soit $\lambda_0 \in \mathsf{Sp}(A)$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$, λ_0 est valeur propre de A donc λ_0 est aussi valeur propre de $D_p^{-1} A D_p$ (même polynôme caractéristique) et donc d'après 8.b) il existe i tel que $|\lambda_0 - a_{ii}| \leqslant L_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \frac{p_j}{p_i}$, donc $|\lambda_0| \leqslant |a_{ii}| + L_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \frac{p_j}{p_i} = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{i,j}|$, donc $\rho(A) = |\lambda_0| \leqslant \displaystyle\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}|$ et ceci pour tout $p > 0$, donc $\rho(A)$ est un minorant des $\displaystyle\max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}|$ quand $p > 0$. Par définition de la borne inférieur on conclut :

$$\boxed{\rho(A) \leqslant \inf_{p>0} \left(\max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j |a_{ij}| \right)}$$

(b) i. Montrer que le majorant de $\rho(A)$ de la question précédente est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$ revient à montrer que pour tout $p > 0$, $\displaystyle\max_{i\in[\![1,3]\!]} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{ij}|$ est supérieur ou égal à $\frac{83}{3}$.

Supposons le contraire alors pour $i = 1, 2, 3$, on aurait $\dfrac{1}{p_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{3} p_j|a_{ij}| < \dfrac{83}{3}$ d'où en sommant les 3 :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j|a_{ij}| < 3\frac{83}{3} = 83.$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j|a_{ij}| = 19 + 16\frac{p_1}{p_2} + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_1} + 8\frac{p_2}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_2}$.

D'autre part l'étude des variations de $t \mapsto t + \dfrac{1}{t}$ ou l'inégalité arithmético-géométrique donne pour tout $t > 0$, $t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2$, on en déduit que pour tout $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$: $\dfrac{p_1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \geqslant 2$, de même pour les 2 autres. D'où

$19 + 16\dfrac{p_1}{p_2} + 16\dfrac{p_2}{p_1} + 8\dfrac{p_1}{p_3} + 8\dfrac{p_3}{p_1} + 8\dfrac{p_2}{p_3} + 8\dfrac{p_3}{p_2} \geqslant 19 + 16 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 2 = 83$ ce qui donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j|a_{i,j}| \geqslant 83$: Absurde.

$\boxed{\text{Le majorant de la question 11.a) est supérieur ou égal à } \dfrac{83}{3}}$

ii.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-7 & 16 & -8 \\ 16 & X-7 & 8 \\ -8 & 8 & X+5 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X+9 & 16 & -8 \\ X+9 & X-7 & 8 \\ 0 & 8 & X+5 \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \\
&= (X+9)\begin{vmatrix} 1 & 16 & -8 \\ 1 & X-7 & 8 \\ 0 & 8 & X+5 \end{vmatrix} \\
&= (X+9)(X^2 - 18X + 243) = (X+9)^2(X-27)
\end{aligned}$$

On en déduit une valeur approchée (sic !) de $\rho(A)$: $\boxed{\rho(A) = 27,000000}$