## Exercice 1

1) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $g_t : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{t+x}$. Comme $g_t$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et comme $f_0(x) \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est bien définie avec $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(t) = g_t(f_n(t))$.

Si $t = 0$, la suite $(f_n(t))$ est la suite nulle, qui converge vers

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Dans la suite de cette question, on suppose que $t > 0$.

Posons $h_t : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto g_t(x) - x$. Par croissance stricte de la fonction $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h_t(x)$ est, au sens strict, du signe de $\sqrt{t+x}^2 - x^2 = t + x - x^2$. Le discriminant de ce trinôme du second degré en $x$ est $1 + 4t$ et ses racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{1+4t}}{-2} = \frac{1\mp\sqrt{1+4t}}{2}$.

La plus petite des racines est strictement négative.

On en déduit que $h_t(x)$ est strictement positif (du signe de $-(-1)$) sur $[0, \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}[$, nul en $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ et strictement négatif au delà.

L'intervalle $[0, \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}[$ étant stable par $g_t$ et contenant $f_0(x)$, la suite $(f_n(t))$ est (par récurrence) à valeurs dans cette intervalle. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) = h_t(f_n(t)) > 0$.

La suite $(f_n(t))$ est ainsi (strictement) croissante et majorée (par $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$), donc converge vers une limite $f(t)$.

De plus, par passage à la limite dans la relation $f_{n+1}(t) - f_n(t) = h_t(f_n(t))$ et par continuité de $h_t$, on a

$$f(t) - f(t) = h_t(f(t))$$

(car la suite $(f_{n+1}(t))$, étant extraite de $(f_n(t))$, converge vers $f(t)$)

Ainsi, puisque $h_t$ ne s'annule qu'en $\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$, on a

$$\boxed{f(t) = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} \quad (\text{si } t > 0}$$

2) La convergence de la suite $(f_n)$ vers $f$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car sinon, les $f_n$ étant continues, $f$ le serait également, ce qui n'est pas le cas puisque

$$\lim_{t\mapsto 0^+} f(t) = 1 \neq 0 = f(0).$$

3) Soit $t > 0$.

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(t) - f(t)| &= |g_t(f_n(t)) - g_t(f(t))| \\
&= |\sqrt{t + f_n(t)} - \sqrt{t + f(t)}| \\
&= \left|\frac{(t + f_n(t)) - (t + f(t))}{\sqrt{t + f_n(t)} + \sqrt{t + f(t)}}\right| \\
&= \left|\frac{(t + f_n(t)) - (t + f(t))}{f_{n+1}(t) + f(t)}\right| \\
&\leqslant \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)}
\end{aligned}$$

car $0 < f_{n+1}(t) \leqslant f(t)$ par croissance de la suite $(f_n(t))$.

4) Soit $a > 0$.

Pour tout $t \in [a, +\infty[$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(t) - f(t)| &\leqslant \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(t)} \\ &\leqslant \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2f_{n+1}(a)} \end{aligned}$$

car une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $2f_{n+1}(a) \underset{n\to\infty}{\to} 2f(a) = 1 + \sqrt{1+4a} > 1$, choisissant $k \in ]1, 2f(a)[$ (un tel $k$ existe), il existe un entier $N$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ 2f_{n+1}(a) \geqslant k.$$

Par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant N$ et tout $t \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \frac{|f_1(t) - f(t)|}{k^{n-N}(2f_N(a))\dots(2f_2(a))}$$

Reprenant le calcul du début de la question 3),

$$[f_1(t) - f(t)| = \frac{|f_0(t) - f(t)|}{f_1(t) + f(t)} = \frac{f(t)}{f_1(t) + f(t)} \leqslant 1$$

On a donc pour tout $n \geqslant N$ :

$$||f_n - f||_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{k^{n-N}(2f_N(a))\dots(2f_2(a))}$$

Comme $k > 1$, on a par encadrement :

$$||f_n - f||_{\infty,[a,+\infty[} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ce qui montre que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, +\infty[$.

## Exercice II

1) a) La fonction $g$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée. Par 1-périodicité de $g$, elle est $\boxed{\text{bornée sur } \mathbb{R}}$. En effet, notant $M$ un majorant de $|g|$ sur $[0, 1]$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| = |g(y)| \leqslant M$ où $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

b) Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a^n g(b^n x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant |a^n g(b^n x)| \leqslant ||g||_\infty a^n$ donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$, donc converge simplement.

c) Par la question précédente, $\sum f_n$ converge uniformément. Les fonctions $f_n$ étant continues, la fonction $\boxed{W \text{ est continue}}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|W(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||g||_\infty a^n = \frac{||g||_\infty}{1-a}$. Ainsi $W$ est bornée et $\boxed{||W||_\infty \leqslant \frac{||g||_\infty}{1-a}}$.

2) a) Soit $f$ une fonction bornée de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|T(f)(x)| \leqslant a||f||_\infty$$

Donc $\boxed{T(f) \text{ est bornée}}$.

Pour $f$ et $g$ bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda f + g)(x) = a(\lambda f + g)(bx) = \lambda a f(bx) + ag(bx) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

donc $\boxed{T \text{ est linéaire}}$.

b) Soit $f$ bornée telle que $T(f) = f$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = af(bx)$$

Comme $x \mapsto bx$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on a

$$||x \mapsto f(bx)||_\infty = ||f||_\infty$$

Comme $||.||_\infty$ est une norme, on a donc $||f||_\infty = |a|.||f||_\infty = a||f||_\infty$.

Comme $a \neq 1$ et $(1-a)||f||_\infty = 0$, on a $||f|||_\infty = 0$ donc $f$ est nulle.

Donc $\boxed{\text{1 n'est pas une valeur propre de } T}$.

c) Remarquons que pour tout naturel $n$, $T(f_n) = f_{n+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(W)(x) = aW(bx) = a\sum_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n bx) = \sum_{p=1}^{\infty} g(b^p x) = W(x) - g(x)$.

Donc $\boxed{T(W) = W - g}$.

Soit $Z$ une fonction bornée vérifiant la même relation.

Par linéarité de $T$, $T(W-Z) = W-Z$. Comme 1 n'est pas valeur propre de $T$, $W - Z = 0$ donc $\boxed{W = Z}$.

3) a) Comme $\beta_m - x_0 \underset{m\to\infty}{\to} 0$ et $\alpha_m - x_0 \underset{m\to\infty}{\to} 0$

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(\beta_m - x_0) + o(\beta_m - x_0) - \Big(f(x_0) + f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\alpha_m - x_0)\Big)}{\beta_m - \alpha_m}$$

Or $|\beta_m - x_0| = \beta_m - x_0 \leqslant \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ et $|\alpha_m - x_0| = x_0 - \alpha_m \leqslant \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ donc $\beta_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$ et $\alpha_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - x_0) - f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \\ &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - \alpha_m) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \boxed{\underset{m\to\infty}{\to} f'(x_0)}\end{aligned}$$

b) Pour tout réel $x$, et tout entier $k$, l'encadrement $-\frac{1}{2} < x - k \leqslant \frac{1}{2}$ équivaut à $x + \frac{1}{2} > k \geqslant x - \frac{1}{2}$. Il existe $\boxed{\text{un unique entier } k \text{ vérifiant ceci}}$, c'est $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$.

On applique ce résultat à $x = b^m x_0$.

c) $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$|\sin x - \sin y| = 2|\sin \frac{x-y}{2}|.|\cos \frac{x+y}{2}| \leqslant 2|\sin \frac{x-y}{2}|$

Par récurrence, $|\sin x - \sin y| \leqslant 2^n |\sin \frac{x-y}{2^n}| = |x-y| \left|\frac{\sin \frac{x-y}{2^n}}{\frac{x-y}{2^n}}\right|$.

Or $\frac{x-y}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\frac{\sin \frac{x-y}{2^n}}{\frac{x-y}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \sin'(0) = 1$. Par passage à la limite dans les inégalités larges,

$$\boxed{|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|.1 = |x-y|}$$

.

(c'est plus simple avec l'inégalité des accroissements finis...)

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \left|a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left|a^n \frac{\sin(2\pi b^n\beta_m)-\sin(2\pi b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{|2\pi b^n\beta_m - 2\pi b^n\alpha_m|}{\beta_m-\alpha_m} \\
&= \boxed{2\pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n} \\
&= 2\pi \frac{(ab)^m-1}{ab-1}
\end{aligned}
$$

d)

$$2\pi b^m\alpha_m = 2\pi(k_m - \frac{3}{4}) \equiv -\frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$$

donc $\boxed{g(b^m\alpha_m)=1}$

$$2\pi b^m\beta_m = 2\pi(k_m + \frac{3}{4}) \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi]$$

donc $\boxed{g(b^m\beta_m)=-1}$

Soit $n$ un entier tel que $n > m$.

$$2\pi b^n\alpha_m = 2\pi b^{n-m}(k_m - \frac{3}{4}) \equiv -\frac{3\pi b^{n-m}}{2} \equiv 0 \ [\pi]$$

car $b$ est un entier pair et $n-m>0$ donc $b^{n-m}$ est pair.

Donc $\boxed{g(b^n\alpha_m)=0}$.

De même, $\boxed{g(b^n\beta_m)=0}$.

e)

$$
\begin{aligned}
\frac{W(\beta_m)-W(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} + a^m\frac{-1-1}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant \left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| - \frac{2a^m}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant 2\pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1} - \frac{2a^m}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant 2\pi\frac{(ab)^m}{ab-1} - \frac{2a^m}{\frac{6}{4b^m}} \\
&= \boxed{(ab)^m\left(\frac{2\pi}{ab-1}-\frac{4}{3}\right)}
\end{aligned}
$$

f) Supposons que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

$ab-1>\frac{3\pi}{2}$ donc $\frac{1}{ab-1}<\frac{2}{3\pi}$ et $\frac{2\pi}{ab-1}<\frac{4}{3}$ et comme $ab>1$, on a par la majoration précédente :

$$\frac{W(\beta_m)-W(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\underset{m\to\infty}{\to}-\infty$$

Or $b^m x_0-\frac{1}{2}\leqslant k_m<b_m x_0+\frac{1}{2}$ donc $x_0-\frac{1}{2b^m}\leqslant k_m<x_0+\frac{1}{2b^m}$ donc

$x_0-\frac{1}{2b^m}-\frac{3}{4b^m}\leqslant\alpha_m<x_0+\frac{1}{2b^m}-\frac{3}{4b_m}<x_0$

et

$x_0<x_0-\frac{1}{2b^m}+\frac{3}{4b^m}\leqslant\beta_m<x_0+\frac{1}{2b^m}+\frac{3}{4b_m}<x_0$

On en déduit que les suites $(\alpha_m)$ et $(\beta_m)$ vérifient bien les hypothèses de la question 3)a).

Donc, d'après cette même question, $W$ n'est pas dérivable en $x_0$ (car sinon on aurait $W'(x_0)=-\infty$.)

Ainsi $\boxed{W \text{ n'est dérivable en aucun point}}$.

Cet exemple donné par Weierstrass d'une fonction continue partout et dérivable nulle part a choqué certains lors de sa publication. Charles Hermite écrit en 1893 dans une lettre à Thomas Stieltjes :

*"Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées"*