1) On considère $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à A et on note $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition de A, u vérifie que

$$u : e_i \mapsto \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i \leqslant n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Par une récurrence, on montre que pour tout entier $k \leqslant n$,

$$u^k : e_i \mapsto \begin{cases} e_{i+k} & \text{si } i \leqslant n-k \\ 0 & \text{si } i > n-k \end{cases}$$

On en déduit que les puissances successives de A_n sont obtenues "en décalant la diagonale de 1 vers le bas".

En particulier, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{Im}(u^k) = \mathsf{Vect}(e_{1+k}, \dots, e_n)$ est de dimension $n-k$ et par théorème du rang, le noyau de u^k (et donc de A_n^k en identifiant $\mathbb{K}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) est de dimension k. De plus, pour $k \geqslant n$, $A_n^k = 0$ et donc la dimension du noyau de A_n^k est n.

2) a) Pour $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ où $X_1 \in \mathscr{M}_{n_1,1}(\mathbb{K}), \dots, X_p \in \mathscr{M}_{n_p,1}(\mathbb{K})$, on a

$$AX = 0 \Leftrightarrow A_{n_1}X_1 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } A_{n_p}X_p = 0$$

Ainsi le noyau de A est isomorphe au produit des noyaux de $A_{n_1}, \dots, A_{n_p}$.
Ainsi

$$\dim \mathsf{Ker}(A) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathsf{Ker}(A_{n_i}) = \sum_{i=1}^{p} 1 = p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = r_1.$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{n_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{n_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n_p}^2 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment,

$$\dim \mathsf{Ker}(A^2) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathsf{Ker}(A_{n_i}^2)$$

Maintenant, $\dim \mathsf{Ker}(A_{n_i}^2)$ vaut 2 sauf si $n_i = 1$ dans quel cas cette dimension est 1. On en déduit que

$$\dim \mathsf{Ker}(A^2) = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i = r_1 + r_2.$$

c) En réitérant le procédé ci-dessus, on obtient que

$$d_k = \dim \mathsf{Ker}(A^k) = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i + k \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

3) a) Posons, pour k compris entre 0 et q, $F_k = \mathsf{Ker}(u^k)$.

Notons déjà que pour $k < q$, $F_k \subset F_{k+1}$. En effet, si $x \in F_k$ alors $u^k(x) = 0$ et donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$. On en déduit que $x \in F_{k+1}$ ce qui signifie bien que $F_k \subset F_{k+1}$. Supposons alors par l'absurde que cette suite ne soit pas **strictement** croissante. Il existe donc k compris entre 0 et $q-1$ tel que $F_k = F_{k+1}$. On montre alors que $F_{k+1} = F_{k+2}$, en effet, pour $x \in E$,

$$x \in F_{k+2} \iff u^{k+2}(x) = 0 \iff u^{k+1}(u(x)) = 0 \iff u(x) \in F_{k+1} \iff (...)$$

$$(...) \iff u(x) \in F_k \iff u^k(u(x)) = 0 \iff x \in F_{k+1}.$$

En procédant de même, $F_k = F_{k+1} = \cdots = F_{q-1} = F_q$. Or ce dernier point est absurde car F_{q-1} n'est pas égal à E en entier alors que $F_q = E$.

Finalement, la suite finie $(\mathsf{Ker}(u^k))_{0 \leqslant k \leqslant q}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion.

b) i) Soit $F = Vect(e_{1,1}, \ldots, e_{s_q,1})$. C'est par définition un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u^{q-1}$ dans $\mathsf{Ker}(u^q) = E$.

Pour tout $x \in F$ on a $0 = u^q(x) = u^{q-1}(u(x))$ donc $u(x) \in \mathsf{Ker}(u^{q-1})$. Si de plus $x \neq 0$ alors $x \notin \mathsf{Ker}(u^{q-1})$ donc $0 \neq u^{q-1}(x) = u^{q-2}(u(x)$ donc $u(x) \notin \mathsf{Ker}(u^{q-2})$.

Comme $e_{1,1}, \ldots, e_{s_q,1} \in F \setminus \{0\}$ (ce sont les éléments d'une base de F), leurs images $e_{1,2}, \ldots, e_{s_q,2}$ par u appartiennent à $\mathsf{Ker}(u^{q-1}) \setminus \mathsf{Ker}(u^{q-2})$.

De plus la restriction de u à F est injective car son noyau est $F \cap \mathsf{Ker}(u) \subset F \cap \mathsf{Ker}(u^{q-1}) = \{0\}$.

Comme $(e_{1,1}, \ldots, e_{s_q,1})$ est une famille libre de vecteurs de F, la famille $(e_{1,2}, \ldots, e_{s_q,2})$ est libre.

ii) Dans les notations précédentes, montrons que $u(F)$ est en somme directe avec $\mathsf{Ker}(u^{q-2})$.

Soit y un élément non nul de $u(F)$. Il existe alors un élément non nul x de F tel que $y = u(x)$. On a montré dans la question précédent qu'alors $u(x)$ (qui est égal à y) n'appartient pas à $\mathsf{Ker}(u^{q-2})$, ce qu'il fallait démontrer.

Comme $(e_{1,2}, \ldots, e_{s_q,2})$ est une base de $u(F)$, on obtient en lui concaténant une base $\mathsf{Ker}(u^{q-2})$ une base de $u(F) \oplus \mathsf{Ker}(u^{q-2}) \subset \mathsf{Ker}(u^{q-1})$, qu'on peut compléter en une base de $\mathsf{Ker}(u^{q-1})$.

Notons $(e_{s_q+1,2}, \ldots, e_{s_{q-1},2})$ les vecteurs de cette complétion (le nombre total est bien s_{q-1} car c'est $\dim F_{q-1} - \dim F_{q-2}$). La famille $(e_{1,2}, \ldots, e_{s_{q-1},2})$ est alors la base d'un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u^{q-2})$ dans $\mathsf{Ker}(u^{q-1})$. Ainsi $s_{q-1} \geqslant s_q$.

c) $(e_{1,q}, \ldots, e_{s_1,q})$ est une base de $\mathsf{Ker}(u)$, $(e_{1,q-1}, \ldots, e_{s_2,q-1})$ est une base d'un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u)$ dans $\mathsf{Ker}(u^2)$ donc la concaténation de ces deux familles est une base de $\mathsf{Ker}(u^2)$. En itérant ce raisonnement, on en déduit que la famille constituée de tous les vecteurs $e_{i,j}$ est une base de $\mathsf{Ker}(u^q) = E$.

La famille libre $(e_{1,1}, \ldots e_{1,q})$ engendre un sous-espace stable par u puisque, par construction, $u(e_{1,1}) = e_{1,2}$, $u(e_{1,2}) = e_{1,3}$ et ainsi de suite jusqu'à $u(e_{1,q-1}) = e_{1,q}$ et pout finir $u(e_{1,q}) = 0$. De ce fait, l'endomorphisme induit par u sur ce sous-espace a pour matrice dans cette base la matrice A_q. Il en va de même pour les familles $(e_{2,1}, e_{2,2}, \ldots e_{2,q})$, $\cdots$, $(e_{s_q,1}, \ldots, e_{s_q,q})$.

De même, la famille libre $(e_{s_q+1,2}, \ldots, e_{s_q+1,q})$ engendre un sous-espace vectoriel stable par u, et l'endomorphisme de ce sous-espace vectoriel induit par u a pour matrice A_{q-1} dans cette base, etc...

Ainsi dans la base

$$\begin{array}{l}\Big(\quad e_{1,1},\dots e_{1,q}, \quad \cdots, \; e_{s_q,1},\dots,e_{s_q,q}, \\ \quad e_{s_q+1,2},\dots,e_{s_q+1,q}, \quad \cdots, \; e_{s_{q-1},2},\dots,e_{s_{q-1},q} \\ \quad \cdots, \\ \quad e_{s_3+1,q-1},e_{s_3+1,q}, \quad \cdots, \; e_{s_2,q-1},e_{s_2,q} \\ \quad e_{s_2+1,q}, \quad \cdots, e_{s_1,q} \Big)\end{array}$$

la matrice de u est diagonale par blocs avec
$s_q = d_q - d_{q-1} = n - d_{q-1}$ blocs de taille q
$s_{q-1} - s_q = (d_{q-1} - d_{q-2}) - (d_q - d_{q-1})$ blocs de taille $q - 1$
$\dots$
$s_2 - s_3 = (d_2 - d_1) - (d_3 - d_2)$ blocs de taille 2
$s_1 - s_2 = (d_1 - d_0) - (d_2 - d_1) = 2d_1 - d_2$ blocs (nuls) de taille 1

Pour résumer, la question 3) prouve l'existence d'une matrice représentant u dans une base judicieuse, diagonale par blocs à blocs diagonaux de la forme A_{n_i} . La question 2 montre l'unicité d'une telle matrice dite de Jordan, à permutation près des blocs diagonaux, puisque les nombres de blocs de taille donnée s'expriment univoquement à l'aide des dimensions des noyaux des puissances de u.