Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les puissances successives de A_n, puis les dimensions des noyaux de ces puissances.

2) Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$. Soit A la matrice définie par blocs par

$$A = \begin{pmatrix} A_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{n_p} \end{pmatrix}$$

On note également pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$\alpha_k = \operatorname{card}\{i \in [\![1,p]\!] \setminus n_i = k\}$, le nombre de blocs de taille k

$r_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \alpha_i$,le nombre de blocs de taille au moins k.

a) Déterminer la dimension d_1 du noyau de A en fonction des α puis des r.

b) Déterminer la dimension d_2 du noyau de A^2 en fonction des α puis des r.

c) Déterminer la dimension d_k du noyau de A^k pour tout naturel non nul k en fonction des α puis des r.

3) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier q (non nul) tel que $u^q = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{q-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. *On dit alors que u est nilpotent et que l'entier q est son indice de nilpotence.*

a) Montrer que la suite finie $(\mathsf{Ker}(u^k))_{0 \leqslant k \leqslant q}$ est strictement croissante au sens de l'inclusion.

On note, pour k compris entre 0 et q, d_k la dimension du noyau de u^k. Si $k \geqslant 1$, on pose $s_k = d_k - d_{k-1}$.

b) On suppose que $q \geqslant 2$.

Soit $(e_{1,1}, \dots, e_{s_q,1})$ une base d'un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u^{q-1})$ dans $\mathsf{Ker}(u^q) = E$.

On pose $e_{1,2} = u(e_{1,1}), \dots, e_{s_q,2} = u(e_{s_q,1})$.

i) Montrer que $(e_{1,2}, \dots, e_{s_q,2})$ est une famille libre à termes dans $\mathsf{Ker}(u^{q-1}) \setminus \mathsf{Ker}(u^{q-2})$.

ii) Montrer qu'on peut compléter cette famille en une base $(e_{1,2}, \dots, e_{s_{q-1},2})$ d'un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u^{q-2})$ dans $\mathsf{Ker}(u^{q-1})$. En déduire que $s_{q-1} \geqslant s_q$.

c) On itère le raisonnement précédent jusqu'à obtenir une base $(e_{1,q}, \dots, e_{s_1,q})$ d'un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(u^0) = \{0\}$ dans $\mathsf{Ker}(u)$ (c'est-à-dire une base de $\mathsf{Ker}(u)$), avec $u(e_{i,j}) = e_{i,j+1}$ pour tout $j \in [\![1, q-1]\!]$ et tout $i \in [\![1, s_{q+1-j}]\!]$.

Préciser comment ordonner les vecteurs $e_{i,j}$ pour obtenir une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à des A_n ($n \in \mathbb{N}$). On précisera, dans l'ordre, les tailles de ces blocs diagonaux.