1. (a) Comme ρ_n est le reste d'indice n d'une série convergente, il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc le résultat est acquis par définition de la convergence vers 0.

   (b) On réalise une transformation d'Abel.
   Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $a_k = \rho_{k-1} - \rho_k$, d'où pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} S_p(x) - S_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{p} a_k\, x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} (\rho_{k-1} - \rho_k)\, x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \rho_{k-1}\, x^k - \sum_{k=n+1}^{p} \rho_k\, x^k \\ &= \sum_{k=n}^{p-1} \rho_k\, x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \rho_k\, x^k \\ &= x^{n+1}\, \rho_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)\, \rho_k - x^p\, \rho_p \end{aligned}$$

   (c) On en déduit que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |S_p(x) - S_n(x)| &\leqslant |x^{n+1}|\, |\rho_n| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |x^{k+1} - x^k|\, |\rho_k| + |x^p|\, |\rho_p| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(|x^{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |x^{k+1} - x^k| \; + |x^p| \right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) \; + x^p \right) \end{aligned}$$

   car $x^{k+1} - x^k \leqslant 0$ si $x \in [0,1]$.

   (d) Or par télescopage,

$$x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) \; + x^p = 2\, x^{n+1} - x^p + x^p = 2\, x^{n+1} \leqslant 2$$

   Finalement : $\forall n \geqslant N, \forall x \in [0,1]\ |R_n(x)| \leqslant 2\, \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

   (e) On a obtenu que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $||R_n||_\infty \leqslant \varepsilon$. C'est-à-dire que (R_n) converge uniformément vers l'application nulle sur $[0,1]$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

   (f) Pour tout entier naturel n, la fonction $u_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$. Comme de plus la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, la limite $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = a_n R^n$. On montre alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. On peut alors lui appliquer ce qui précède pour obtenir le résultat voulu.
3. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. On voit facilement que son rayon de convergence vaut 1. Notons f sa somme sur $]-1,1[$. Par dérivation

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^2 n = \frac{1}{1+x^2}$$

En intégrant (et en remarquant que $f(0) = 0$) on obtient que pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \arctan(x)$.
De plus, on remarque que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ relève du théorème des séries alternées car

— Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2n+1} \geqslant 0$.
— La suite $(\frac{1}{2n+1})_{n\geqslant 0}$ décroit.
— La suite $(\frac{1}{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Cela montre que la série converge.
On peut appliquer le théorème d'Abel raidal

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$