Exercice I

1) La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t} = g(t)$.

La fonction g est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty g$ diverge car $\frac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
Par intégration des relations de comparaison, on donc

$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_1^x = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

2) Soit $x \geqslant 1$,

$$F(x) - \frac{\ln^2 x}{2} = \int_1^x \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t}dt = \int_1^x \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}dt$$

Posons $h : t \mapsto \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}$.
Cette fonction est continue sur $[1,\infty[$ et $h(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. Donc elle est intégrable sur $[1,\infty[$ car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ l'est.
Donc

$$F(x) - \frac{\ln^2 x}{2} \underset{x\to\infty}{\to} C = \int_1^\infty \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}dt$$

autrement dit :

$$F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C + \underset{x\to\infty}{o}(1)$$

3) On veut calculer $C = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}dt$. On remarque que si $t \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{t} \in]0,1[$. On peut donc utiliser la formule donnée dans l'énoncé.

$$C = \int_1^\infty \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kt^k}dt = \int_0^\infty \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kt^{k+1}}dt$$

Pour tout $k \geqslant 1$, on pose $h_k : t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}}{kt^{k+1}}$.
Les fonctions h_k et la fonction h sont continues par morceaux sur $]1,\infty[$.
La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} h_k$ converge simplement sur $]1,\infty[$ et sa fonction somme est h.
De plus, pour tout $k \geqslant 1$ la fonction h_k est intégrable sur $]1,\infty[$ et

$$\int_1^\infty |h_k| = \int_1^\infty \frac{dt}{kt^{k+1}} = \left[\frac{-1}{k^2t^k}\right]_1^\infty = \frac{1}{k^2}$$

Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 1}\int_1^\infty |h_k|$ converge.
Donc, par le théorème d'intégration terme à terme,

$$C = \sum_{k=1}^\infty \int_1^\infty h_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-\frac{2}{4}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}\\
&= \boxed{\frac{\pi^2}{12}}
\end{aligned}$$

Exercice II

1) a) Par le changement de variable $u = tx,\ dx = \frac{du}{t}$, on a :

$$\int_0^{\beta} e^{-tx}\, g(x)\, dx = \int_0^{\beta t} e^{-u}\, g\left(\frac{u}{t}\right)\frac{du}{t} = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} e^{-u}\, g_t(u)\, du$$

avec

$$g_t : u \mapsto \begin{cases} g(\frac{u}{t}) & \text{si } u \leqslant \beta t\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Posons $h_t : u \mapsto e^{-u}g_t(u)$.
Pour tout $t > 0$, la fonction h_t est continue par morceaux sur $[0, \infty[$.
Pour tout $u \geqslant 0$, $h_t(u)$ est égal à $e^{-u}g(\frac{u}{t})$ pour t suffisamment grand (pour $t \geqslant \frac{u}{\beta}$), donc, par continuité de g en 0,

$$h_t(u) \underset{t\to\infty}{\to} e^{-u}g(0) = h(u)$$

Enfin, g étant continue sur le segment $[0, \beta]$, elle est bornée. Soit M un majorant de $|g|$. On a alors

$$\forall t > 0\ \forall u \geqslant 0\ |h_t(u)| \leqslant Me^{-u} = \varphi(u)$$

(y compris dans le cas où $u > \beta t$ car alors $h_t(u) = 0$)
Comme la fonction φ est intégrable sur $[0, \infty[$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{\infty} h_t(u)du \underset{t\to\infty}{\to} \int_0^{\infty} e^{-u}g(0)du = g(0)$$

Donc

$$\int_0^{\beta} e^{-tx}\, g(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$

b) Par le changement de variable $u = \sqrt{t}x,\ dx = \frac{du}{\sqrt{t}}$, on a :

$$\int_0^{\beta} e^{-tx^2}\, g(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\beta\sqrt{t}} e^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente, on a :

$$\int_0^{\beta\sqrt{t}} e^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du \underset{t\to\infty}{\to} \int_0^{\infty} e^{-u^2} g(0)du = \frac{\sqrt{\pi}g(0)}{2}$$

Ainsi

$$\int_0^{\beta} e^{-tx^2}\, g(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{g(0)}{\sqrt{t}}.$$

2) a) La fonction $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante car $\Phi' = \varphi' > 0$. Elle réalise donc une bijection de $[a, b]$ sur $[\Phi(a), \Phi(b)] = [0, \beta]$ avec $\beta = \Phi(b) = \varphi(b) - \varphi(a) > 0$.

b) On effectue le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $x = \Phi^{-1}(u)$

$$dx = (\Phi^{-1})'(u)du = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(u))}du = \frac{1}{\varphi'(\Phi^{-1}(u))}du$$

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}\, f(x)\, dx = \int_0^\beta e^{-t(u+\varphi(a))}\, \frac{f(\Phi^{-1}(u))}{\varphi'(\Phi^{-1}(u))}du$$

Posons $g = \left(\frac{f}{\varphi'}\right) \circ \Phi^{-1}$. La fonction g est continue car f, φ' et Φ^{-1} le sont et φ' ne s'annule pas. Donc par la question 1)a),

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^\beta e^{-tu} g(u)du \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} g(0)}{t} = \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}$$

3) a) Rappelons que la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Ainsi la fonction ψ est continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a, b]$ car $\varphi(x) - \varphi(a) > 0$ pour tout $x \in]a, b]$ car φ est strictement croissante.
Pour tout $x \in]a, b]$,

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} \underset{x\to a^+}{\sim} \frac{\varphi''(a)(x-a)}{2\sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2}}$$

donc

$$\psi'(x) \underset{x\to a^+}{\to} \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$$

Par le théorème de limite de la dérivée, ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\psi'(a) = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$.

c) Comme ψ' est strictement positive, ψ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ vers $[\psi(a), \psi(b)] = [0, \beta]$ avec $\beta = \psi(b) > 0$.

d) Par le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $x = \psi^{-1}(u),\ dx = \frac{du}{\psi'(\psi^{-1}(u))}$

$$F(t) = \int_0^\beta e^{-t(\varphi(a)+u^2)} g(u)du$$

avec $g = \left(\frac{f}{\psi'}\right) \circ \psi^{-1}$.
Comme g est continue sur $[0, \beta]$, on a par la question 1)b) :

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{g(0)}{\sqrt{t}} = e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{f(a)}{\psi'(a)\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\, \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

4) *Application.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (car $n - 1 \in \mathbb{N}$) et $x = x^2 f_n(x) = x^{n+1}e^{-x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ donc $f_n(x) = \underset{x\to\infty}{o}(1/x^2)$. Donc f est intégrable sur $[0, \infty[$.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = [-e^{-x}x^n]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}nx^{n-1}dx$$

Cette intégration par parties est justifiée par la convergence de l'intégrale de droite, qui vaut $n\Gamma(n)$. Le crochet vaut $0 - 0 = 0$.
Donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = (n-1)(n-2)\ldots 1\Gamma(1) = (n-1)!$$

b) On vient de voir que

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

Effectuons le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $x = nu, dx = ndu$ bijectif de $[0, \infty[$ dans lui-même

$$n! = \int_0^\infty (nu)^n e^{-nu} n\, du = n^{n+1} \int_0^\infty u^n e^{-nu} du = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(u - \ln u)}\, du = n^{n+1} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-n\varphi(u)}\, du$$

avec $\varphi : u \mapsto u - \ln u$ et $f : u \mapsto 1$.
La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, \infty[$ et pour tout $u > 0$, $\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$.
La fonction φ' ne s'annule qu'en $c = 1$, la fonction f est continue sur $]0, \infty[$ et ne s'annule pas en c. On a aussi $\varphi''(c) = \frac{1}{c^2} = 1 > 0$.
De plus $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\varphi(u)} |f(u)| du = \int_0^\infty e^{-\varphi(u)} du$ converge (et vaut $\Gamma(1)$).
Par le résultat admis,

$$n! \sim n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \frac{e^{-n\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{n}} = n^{n+1} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$