Exercice 1

1) a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, par téléscopage,

$$\sum_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1) = n\ln n - 1\ln 1 = n\ln n$$

b) Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \ln(n!) - n\ln &= \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ln(k-1) - (k-1)\ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

2) Pour $k \to +\infty$

$$\begin{aligned} (k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= (k-1)\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

3) On pose $\alpha_k = (k-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) + 1 - \dfrac{1}{2k}$ de sorte que $\alpha_k \sim \dfrac{1}{6k^2}$ et que

$$(k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - n\ln n = \sum_{k=2}^{n} -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k = -(n-1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$$

Donc, pour $n \geqslant 2$

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k$$

4) a) Comme $(\alpha_k) \sim \frac{1}{6k^2}$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \alpha_k$ converge. Si on note S sa somme on a donc pour $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k = S + o(1)$. En utilisant la propriété donnée dans la question,

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma - 1) + S + o(1)$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n = \frac{\gamma + 1}{2} + S + o(1)$$

et donc, en posant $C = \frac{\gamma+1}{2} + S$,

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow C$$

b) En prenant l'exponentielle et en notant $K = \exp(C)$, on a

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \exp\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow K$$

et donc

$$n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}$$

5) a) On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

b) Pour $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t)^{n+1} dt \\
&= \left[-\cos t \times (\sin t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times (\sin t)^n dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \times (\sin t)^n dt \\
&= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

c) Par une récurrence immédiate on a pour $p \geqslant 0$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times I_{2p-2} = \cdots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{1}{2} I_0$$

et donc

$$I_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p} 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même,

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

6) a) Pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - 1)(\sin t)^n dt \leqslant 0$$

car pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(\sin t - 1)(\sin t)^n \leqslant 0$.

La suite (I_n) décroit.

b) La formule trouvée en 1.b) montre que

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc $I_n \sim I_{n+2}$.

En utilisant maintenant la décroissance de la suite (I_n),

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

En divisant par $I_n > 0$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

Par le théorème d'encadrement, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $I_{n+1} \sim I_n$.

c) On pose $\theta_n = (n+1)I_nI_{n+1}$.
Pour tout entier naturel n,

$$\theta_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}I_n = \theta_n$$

La suite (θ_n) est constante égale à $\theta_0 = I_0.I_1 = \frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $I_n.I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
En utilisant la question précédente, on a donc

$$I_n^2 \sim I_n.I_{n+1} \sim \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

En prenant la racine carrée et en utilisant que I_n est positif, on obtient que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

7) Reprenons la formule trouvée pour I_{2p} en remplaçant les factorielles avec la formule obtenue ci dessus.

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(K2^p p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{2p}}{Kp}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$$

En reprenant l'équivalent trouvé à la question précédente,

$$\frac{\pi}{K\sqrt{2p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}}$$

On en déduit que la constante K de la question 4.b) vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 2

1) On commence par remarquer que par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie, et qu'elle est (strictement) croissante. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant u_1 > 0$.
On suppose que la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite qui vérifie $\ell \geqslant u_1 > 0$. On en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$$

Comme la suite (u_n) converge, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge donc la série $\sum \ell(u_{n+1} - u_n)$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge aussi. On en déduit que $\alpha > 1$.

2) On suppose maintenant que $\alpha > 1$. On a vu à la question précédente que pour tout entier n non nul $u_n \geqslant u_1$, on en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \leqslant \frac{1}{u_1}\frac{1}{n^\alpha}$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge (car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$). On en déduit que la suite (u_n) converge.

3) On suppose que $\alpha > 1$ et donc que la suite (u_n) converge. On a vu que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs convergente donc, par le théorème de sommation des équivalents (qui s'applique aux restes car on travaille avec des séries convergentes),

$$\sum_{n=p}^{\infty}(u_{n+1} - u_n) \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

On remarque que, pour tout $N \geqslant p$, $\sum\limits_{n=p}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_p$.
En passant à la limite quand $N \to \infty$, $\sum\limits_{n=p}^{\infty} u_{n+1} - u_n = \ell - u_p$.
On peut alors obtenir l'équivalent des restes des séries de Riemann en procédant par comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout entier $p \geqslant 2$ et tout entier $N \geqslant p$,

$$\int_p^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \sum_{n=p}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{p-1}^{N}\frac{1}{t^\alpha}$$

En calculant les intégrales,

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{p^{\alpha-1}}-\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{n=p}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(p-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$$

On fait alors tendre N vers $+\infty$ pour obtenir que

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{p^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(p-1)^{\alpha-1}}$$

Comme $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{p^{\alpha-1}} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(p-1)^{\alpha-1}}$ on obtient que

$$\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

On en déduit que

$$u_p-\ell \underset{p\to\infty}{\sim} -\frac{1}{\ell(\alpha-1)}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

4) On suppose que $\alpha\in]0,1]$ et donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Soit β un réel.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta-u_n^\beta &= \left(u_n+\frac{1}{n^\alpha u_n}\right)^\beta-u_n^\beta \\ &= u_n^\beta\left(\left(1+\frac{1}{n^\alpha u_n^2}\right)^\beta-1\right) \\ &\sim \frac{\beta}{n^\alpha}u_n^{\beta-2} \qquad \text{car } u_n\to 0 \end{aligned}$$

On prend donc $\beta=2$ de manière à avoir un équivalent indépendant de u_n et on obtient que $u_{n+1}^2-u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}$.
La série $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs divergente donc, par sommation des équivalents (qui s'applique aux sommes partielles car on travaille avec des séries divergentes),

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}^2-u_k^2) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$$

Par téléscopage, $\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}^2-u_k^2)=u_n^2-u_1^2 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n^2$ car (u_n) diverge vers $+\infty$ donc $u_1^2=o(u_n^2)$.
Par comparaison série-intégrale, comme ci-dessus, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, puisque (u_n) est à valeurs positives,

$$u_n=\sqrt{u_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \begin{cases} \sqrt{2\ln(n)} & \text{si } \alpha=1 \\ \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}n^{\frac{1-\alpha}{2}} & \text{si } 0\leqslant\alpha<1 \end{cases}$$