Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

Proposition (Cas $n = 2$ et $n = 3$)

- Dans le cas $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. On utilise qu'il y a deux permutations de $\{1, 2\}$, l'identité et la transposition $\tau = (1, 2)$.
- Dans le cas $n = 3$: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf$. Il suffit d'utiliser les trois permutations paires Id, $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ et les trois permutations impaires $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$. Cela s'appelle la règle de Sarrus.

ATTENTION

A partir de $n = 4$, la formule est impraticable numériquement car il y $n!$ termes dans la somme.

Théorème (Propriétés du déterminant)

1) Le déterminant est multilinéaire par rapport aux colonnes.

$$\begin{aligned}\det\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \lambda C_k + \mu C'_k \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_n \right) &= \lambda \det\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_k \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_n \right) \\ &\quad + \mu \det\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C'_k \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_n \right)\end{aligned}$$

2) Le déterminant est alterné. S'il existe $i \neq j$ tels que $C_i = C_j$,

$$\det\left(C_1 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, C_n \right) = 0$$

2) Opération élémentaire :
   - Si B est la matrice déduite de A par l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$, $\det(B) = -\det(A)$.
   - Si B est la matrice déduite de A par l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $\det(B) = \lambda \det(A)$.
   - Si B est la matrice déduite de A par l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $(i \neq j)$. $\det(B) = \det(A)$.
3) Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\det(M) = \det(M^T)$. On en déduit que les propriétés 1), 2) et 3) s'étendent aux lignes.
4) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.
5) Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

ATTENTION

Le déterminant n'est pas linéaire

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice et $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$.

- *On note A_{ij} la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.*
- *On appelle mineur associé à a_{ij} le déterminant $\Delta_{ij} = \det(A_{ij})$.*
- *On appelle cofacteur (ou mineur signé) associée à a_{ij} le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Le mineur en $(1, 2)$ est $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3$.

Proposition (Développement par rapport à une ligne / colonne)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice.

1. Pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$ (Développement par rapport à une colonne)
2. Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$ (Développement par rapport à une ligne)

Proposition (Déterminant par blocs)

Soit M une matrice triangulaire supérieure par blocs : $M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_2 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$.

On a $\det(M) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \det(A_i)$. Cette formule s'étend aux matrices triangulaires inférieures par blocs

Proposition (Critère d'inversibilité)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Elle est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.

Définition (Comatrice)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle comatrice de A et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrices des cofacteurs.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a $\mathrm{Com}(A)^T.A = \det(A)I$ et $A\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)I$. En particulier, si A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^T.$$

Exercice 88 [332] :

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 & -6 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 99 :

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 92 :

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

On donnera une forme factorisée du résultat.

Exercice 101 [345] : Soit n un entier naturel non nul. On considère le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 6 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

1. Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} ($n \geqslant 3$).
2. En déduire Δ_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 103 [345] : Déterminant de Vandermonde

Soit $a_1, \dots, a_n$ des complexes, on pose

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(a_1)$, $V(a_2)$et $V(a_3)$. On factorisera les expressions trouvées.
2. Montrer que pour $(a_0, \dots, a_{n-1})$ fixés, la fonction $x \mapsto V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ est un polynôme en x. On donnera son degré et son coefficient dominant. On pourra séparer les cas selon que $a_0, \dots a_{n-1}$ sont deux à deux distincts ou pas.
3. En déduire une formule pour $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 104 [346] : Déterminant de Cauchy

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des complexes tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout (i, j).

On note pour $m \leqslant n$, D_m le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{(i,j)\in[\![1\,;\,m]\!]^2} \in \mathscr{M}_m(\mathbf{C})$.

On pose $R = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)}$.

1. On suppose qu'il existe i, j distincts tels que $b_i = b_j$, que vaut D_n ?
2. On suppose que les coefficients b_i sont deux à deux distincts et on note $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$. Montrer que $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$.
3. En déduire une formule pour D_n.

Exercice 122 [364] : Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbf{K})$, $D \in \mathscr{M}_q(\mathbf{K})$.

Montrer que : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Exercice 123 [366] : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable. On définit :

$$L_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

Calculer $\det(L_A)$.

On pourra commencer par essayer de trouver des vecteurs propres pour L_A