

Corrigé exercice 11

Option Informatique – MP

Définitions

Définition

1. On appelle littéral une formule logique de la forme v ou $\neg v$ où $v \in \mathcal{V}$.
2. On appelle conjonction de littéraux toute formule logique de la forme $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_N$ où les v_i sont des littéraux
3. On appelle disjonction de littéraux toute formule logique de la forme $v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_N$ où les v_i sont des littéraux

Définitions

Définition

1. On appelle **minterme** une conjonction de littéraux où chaque variable apparaît une fois et une seule
2. On appelle **maxterme** une disjonction de littéraux où chaque variable apparaît une fois et une seule

Remarque

Par la suite nous supposerons que dans un minterme (resp. dans un maxterme), une même conjonction (resp. disjonction) de littéraux ne peut pas apparaître plusieurs fois.

En effet, en enlevant les redondances on obtient une formule logique équivalente à la formule initiale.

Forme normale disjonctive

Théorème

- ▶ *Toute formule logique est équivalente à une disjonction de mintermes (sans redondances).*
- ▶ *Cette disjonction est unique à l'ordre des facteurs près.*

Forme normale disjonctive

Théorème

- ▶ *Toute formule logique est équivalente à une disjonction de mintermes (sans redondances).*
- ▶ *Cette disjonction est unique à l'ordre des facteurs près.*

Définition

On appelle **forme normale disjonctive** (FND) l'écriture d'une formule logique comme une disjonction de mintermes.

Forme normale disjonctive

Preuve :

On associe à toute distribution de vérité μ un minterme

$$p^\mu = v_1^{\mu(v_1)} \wedge \dots \wedge v_n^{\mu(v_n)}$$

où $v_i^0 = \neg v_i$ et $v_i^1 = v_i$. Par construction,

$$\forall \nu \in \mathcal{B}^{\mathcal{V}}, \nu \models p^\mu \iff \nu = \mu.$$

Forme normale disjonctive

Soit p une proposition logique. On considère \mathcal{D} l'ensemble des distributions de vérité μ satisfaisant p . Par construction

$$p \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}} p^\mu.$$

Cela signifie que pour déterminer la forme normale disjonctive, on peut (à la main), construire la table de vérité de p puis écrire p comme la disjonction des mintermes qui correspondent « aux lignes vérifiant p ».

Forme normale disjonctive

Reprenons l'exemple de $p = (v_1 \vee F) \wedge (v_3 \vee \neg v_2)$.

v_1	v_2	v_3	$v_1 \vee F$	$v_3 \vee \neg v_2$	p
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

On a alors

$$p \equiv (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3).$$

Preuve par induction

On peut aussi prouver par induction que toute formule logique est équivalente à une disjonction de mintermes.

Soit p une formule logique on pose :

$H(p)$: « la formule p est équivalente à une disjonction de mintermes ».

Preuve par induction - Cas de base

- ▶ La constante V est équivalente à la conjonction de tous les mintermes :

$$V \equiv \bigwedge_{\mu \in \mathcal{B}^{\mathcal{Y}}} p^{\mu}.$$

- ▶ La constante F est équivalente à la conjonction d'aucun minterme :

$$F \equiv \bigwedge_{\mu \in \emptyset} p^{\mu}.$$

- ▶ La variable v_i est équivalente à la conjonction de tous les mintermes associés aux distributions μ telles que $\mu(v_i) = 1$:

$$v_i \equiv \bigwedge_{\substack{\mu \in \mathcal{B}^{\mathcal{Y}} \\ \mu(v_i)=1}} p^{\mu}.$$

Preuve par induction

Soit p une formule logique :

- ▶ Si $p = \neg q$ avec q une formule vérifiant $H(q)$. On note alors

$$q \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}} p^\mu$$

où \mathcal{D} est une partie de $\mathcal{B}^\mathcal{V}$. En l'évaluant sur toutes les distributions, on voit que

$$p = \neg q \equiv \bigvee_{\mu \notin \mathcal{D}} p^\mu.$$

De ce fait $H(p)$ est vraie.

Preuve par induction

Soit p une formule logique :

- ▶ Si $p = q_1 \wedge q_2$ avec q_1, q_2 des formules vérifiant $H(q_1)$ et $H(q_2)$. On note alors

$$q_1 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_1} p^\mu \text{ et } q_2 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_2} p^\mu.$$

On a alors,

$$p = q_1 \wedge q_2 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2} p^\mu.$$

De ce fait $H(p)$ est vraie.

Preuve par induction

Soit p une formule logique :

- ▶ Si $p = q_1 \vee q_2$ avec q_1, q_2 des formules vérifiant $H(q_1)$ et $H(q_2)$. On note alors

$$q_1 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_1} p^\mu \text{ et } q_2 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_2} p^\mu.$$

On a de même,

$$p = q_1 \vee q_2 \equiv \bigvee_{\mu \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} p^\mu.$$

De ce fait $H(p)$ est vraie.

Preuve par induction

Par induction structurelle, on a bien montré que toute formule logique est équivalente à une disjonction de mintermes.

FND - Unicité

Nous allons montrer que, pour toute formule logique p , à répétition près et à l'ordre des termes près, il existe une unique disjonction de mintermes qui soit équivalente à p .

Notons que pour tout minterme q il existe une unique distribution de vérité μ tel que $q = p^\mu$. En effet $\mu \mapsto p^\mu$ est une application injective entre deux ensembles ayant 2^n éléments.

FND - Unicté

Comme nous travaillons à l'ordre près et que nous n'autorisons pas de répétition de mintermes, une disjonction de mintermes q est uniquement caractérisée par **l'ensemble** $Z \subset \mathcal{B}^V$ tel que

$$q = \bigvee_{\mu \in Z} p^\mu.$$

Maintenant, pour une proposition p , si on suppose que

$p \equiv \bigvee_{\mu \in Z} p^\mu$ et $p \equiv \bigvee_{\mu \in Z'} p^\mu$ alors, pour toute distribution ν ,

$$\nu \in Z \iff \nu \models p \iff \nu \in Z'.$$

Donc $Z = Z'$.

Forme normale conjonctive

Théorème

- ▶ *Toute formule logique est équivalente à une conjonction de maxtermes (sans redondances).*
- ▶ *Cette conjonction est unique à l'ordre des facteurs près.*

Forme normale conjonctive

Théorème

- ▶ *Toute formule logique est équivalente à une conjonction de maxtermes (sans redondances).*
- ▶ *Cette conjonction est unique à l'ordre des facteurs près.*

Définition

On appelle **forme normale conjonctive** (FNC) l'écriture d'une formule logique comme une conjonction de maxtermes.

Forme normale conjonctive

Preuve : Soit p une formule logique. On considère $\neg p$. D'après ce qui précède, il existe une unique forme normale disjonctive qui est équivalente à $\neg p$:

$$\neg p \equiv m_1 \vee \cdots \vee m_r$$

où m_1, \dots, m_r sont des mintermes. On en déduit par les formules de De Morgan que

$$p \equiv (\neg m_1) \wedge \cdots \wedge (\neg m_r).$$

Forme normale conjonctive

Maintenant, pour un minterme

$$m = v_1^{\varepsilon_1} \wedge \dots \wedge v_n^{\varepsilon_n}$$

où $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ et où $v_i^0 = \neg v_i$ et $v_i^1 = v_i$,

$$\neg m \equiv v_1^{1-\varepsilon_1} \vee \dots \vee v_n^{1-\varepsilon_n}$$

qui est un maxterme.

On a bien obtenu p comme étant équivalent à une conjonction de maxtermes.

FNC - Unicité

On voit aisément que si p était équivalente à deux conjonctions de maxtermes différentes (sans prendre en compte les redondances et l'ordre), en « remontant » le raisonnement ci-dessus on obtiendrait deux FND pour $\neg p$.

Forme normale conjonctive

Pour $p = (v_1 \vee \neg v_2) \wedge (v_3 \vee \neg v_2)$.

v_1	v_2	v_3	$v_1 \vee \neg v_2$	$v_3 \vee \neg v_2$	p	$\neg p$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

On a alors

$$\neg p \equiv (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3).$$

Forme normale conjonctive

Comme

$$\neg p \equiv (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3).$$

on obtient

$$p \equiv (v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3).$$

Forme normale conjonctive

- ▶ On utilise plus souvent les formes normales conjonctives, sans imposer que les conjonctions soient des maxtermes. On parle alors de **clauses**.

Forme normale conjonctive

- ▶ On utilise plus souvent les formes normales conjonctives, sans imposer que les conjonctions soient des maxtermes. On parle alors de **clauses**.
- ▶ En théorie, pour déterminer si deux propositions sont équivalentes, on peut comparer leur forme normale conjonctive. Cependant, quand on a une proposition sur n variables, sa forme normale conjonctive peut avoir 2^n clauses. On a donc, en général, une **explosion combinatoire** lors du calcul de la forme normale conjonctive.

Forme normale conjonctive

Pour $p = (v_1 \wedge v_2) \iff (v_1 \vee v_3)$ on a

v_1	v_2	v_3	$v_1 \wedge v_2$	$v_1 \vee v_3$	p	$\neg p$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

On en déduit la forme normale disjonctive

$$p \equiv (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$$

Forme normale conjonctive

De même

$$\neg p \equiv (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3)$$

et donc la forme normale conjonctive

$$p \equiv (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$$

Forme normale conjonctive

Si on suppose que $n = 4$ on remplace, dans la forme normale disjonctive

$$v_1^{\varepsilon_1} \wedge v_2^{\varepsilon_2} \wedge v_3^{\varepsilon_3}$$

par

$$(v_1^{\varepsilon_1} \wedge v_2^{\varepsilon_2} \wedge v_3^{\varepsilon_3} \wedge v_4) \vee (v_1^{\varepsilon_1} \wedge v_2^{\varepsilon_2} \wedge v_3^{\varepsilon_3} \wedge \neg v_4).$$

De même pour les formes normales conjonctives.